刘林 编著

天体力学方法

南京大学出版社



责任编辑　高锦明
责任校对　王玉华
封面设计　杨小民



ISBN 7-305-03052-X/P·115
定价 18.00元

天体力学方法

刘　林　编著

南京大学出版社

内 容 提 要

本书是一部天体力学领域的基础论著，是南京大学天文系计划编著出版的天体力学丛书的第二部(第一部《天体力学基础》已于1994年出版)。书中对近代天体力学中所采用的基本方法，诸如分析方法(又称普遍摄动法)中的摄动法、平均法和变换方法，数值方法(又称特别摄动法)中的单步法、多步法和哈密顿算法(亦称辛算法)，以及各种摄动因素的处理和轨道改进等，都作了详尽的论述和系统的介绍。除此之外，为了保持本书具有一定的独立性，便于读者阅读，书中对无摄运动和受摄运动的概念等天体力学基础知识也作了必要的阐述。

本书可作为天文和数学、应用数学、计算数学、一般力学、航天和测绘等专业高年级大学生学习轨道力学的基础教材，也可作为研究生和有关科技人员的参考书。

天体力学方法

刘 林 编著

*

南京大学出版社出版

(南京大学校内 邮政编码:210093)

江苏省新华书店发行 江苏省地质测绘院印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:15.125 字数:378千

1998年4月第1版 1998年4月第1次印刷

印数 1—1500

ISBN 7-305-03052-x/p·115

定价:18.00元

前　言

这部《天体力学方法》旨在为实际应用提供广泛的基础指导，内容的介绍和编排都尽可能便于计算工作，其目的不止是一部计算手册，更重要的是从基本原理出发，对论及的课题作必要的逻辑推导，并试图阐明采用这些过程的缘由，从而为读者进一步开展独立研究打下基础。

天体力学问题的研究既可以像数学那样作为一种思维的训练，从而获得对原理和形式逻辑关系的普遍了解，又可以从实用角度进行研究和解决具体问题。前者当然不可忽视，而后者正是本书内容侧重的方面。因此，书中将主要阐述近代天体力学问题中的一些重要方法，包括分析方法和数值方法以及必要的定性讨论。

阅读本书应具备一定的天文知识和天体力学、理论力学以及微积分学基础。此外，为了对某些推导能够彻底理解，还需要掌握线性代数、常微分方程和概率统计（估计理论）等领域的有关知识。

鉴于这本书的目的，其内容具体安排大致分为如下几个部分：

1. 绪论和第一章的基本内容是阐明天体力学问题的具体背景和相应数学模型的建立，即常用的受摄力学系统，特别是受摄二体问题的数学模型。具体介绍受摄系统中运动天体的参考轨道（包括二体问题等可积情况）对应的分析解。

2. 第二章、第三章、第六章和第七章的内容是介绍天体力学问题分析解的经典摄动法、改进的摄动法（即平均根数法）和变换方法，过去常称为普遍摄动（general perturbation）法。其中第六章和第七章的一节是介绍这些方法中出现的奇点问题及相应的运动特征和解决方法。

3. 第四章和第五章是介绍当今天体力学问题中各种天体（包括人造天体）运动可以归结为受摄二体问题时所涉及的几种主要摄动因素及其处理方法，为解决这类具体问题打下必备的基础。

4. 第八章和第九章是介绍求解受摄运动方程时常用的数值方法，即特别摄动（special perturbation）法，其内容并不单纯是通常求解常微分方程数值解法的重复，而是侧重天体运动方程的特点以及近年来引起注意的辛算法（symplectic algorithn）。辛算法是针对哈密顿（Hamiton）系统的，亦称哈密顿算法，对于天体力学和动力天文中的“演化”问题，采用该方法具有独特的优点。

5. 第十章是介绍天体力学定量问题中最重要的一个内容——多资料统计定轨，即轨道改进。

从内容的安排可以看出，虽然书名是天体力学方法，但对非天体力学专业的学生，完全可以作为学习轨道力学的基础教材。

书中公式和符号较多，同一符号在不同公式中可能有不同含义。另外，为了语言上的需要，同一量（或方法）在不同之处可能有不同名称。然而，对于最常用的量（如轨道根数等），将尽量

保持用同一符号表示，而且采用本学科领域中习惯采用的符号，便于读者查阅有关原始文献。

本书是根据南京大学天文系30多年来开设的有关课程的教材和研究工作积累的资料而写成，1993年3月完成初稿。初稿完成后正值作者去美国访问，借此机会，对美国大学有关专业的天体力学、轨道力学以及有关教材和专著作了较详尽的了解，在此基础上对初稿又作了一些必要的修改，于1995年5月完稿。另外，近年来，廖新浩博士在这一方面的教学与科研工作，也为本书的完稿提供了有益的帮助，在此表示衷心的感谢。

编者

1995.5.

目　录

绪　论

一、动力模型

无论是太阳系还是恒星系统(密近双星、星团等),或星系系统,作为天体力学所讨论的对象,包括上述各系统中单个天体或一个天体系统的运动规律。在一定条件下,这些天体都可看成质点,这就对应最简单的 N 体模型,也是天体力学问题所采用的一个经典模型。

在一个天体系统中,N 个天体又往往包含 n 个大天体和 k 个小天体($N=n+k$),其中 k 个小天体相对 n 个大天体而言小到对后者运动没有影响(确切地说影响是存在的,只是该影响从定量或定性的角度来看,小到无需考虑)。但 k 个小天体之间可能相距较近,它们之间的相互作用应予考虑,这就构成了限制性 $n+k$ 体问题,特别当 $N=3,n=2,k=1$,即通常所说的限制性三体问题。例如太阳系中太阳和九大行星即构成一个 10 体问题($N=10$)。而太阳、木星和小行星(处于火星和木星轨道间的主带小行星)这三体系统就构成一个 $N=2+1$ 的限制性三体问题;密近双星及其之间交换的物质(看成小天体)亦可看成限制性三体问题;太阳、木星和木星的四颗伽里略(Galilean)卫星即构成一个 $N=2+4$ 的限制性$(2+4)$体问题。

所有的天体都并非质量分布均匀的球体,在自转平衡条件下,通常为扁球体,而且还有潮汐形变,如各大行星。相应的引力场与球形引力场有明显的差别,在讨论自然卫星和人造卫星绕大行星运动时,由于距离较近,必须考虑非球形效应,即大行星与其卫星构成的不是一个简单的二体系统,在该系统中,还有非球形引力摄动存在,相当于一个限制性三体问题:大行星(作为质点)、非球形部分和作为小天体的卫星。除非球形影响外,还有辐射压(简称光压)作用,如人造地球卫星的运动,就要受到太阳光压力的影响;在密近双星系统中,辐射压也是非常显著的。上述各力学因素都属于保守力范畴,也是经典天体力学考虑的主要内容。事实上,耗散因素几乎在各种层次的天体系统中都存在,人造地球卫星(特别是近地卫星)的运动就是一个典型的例子,地球大气的阻尼影响相当明显。

随着观测精度的提高,广义相对论效应必须考虑,作为牛顿(Newton)框架下的天体力学,天体运动方程中,将要增加后牛顿(Post-Newton)项。

综上所述,各层次的天体系统,从动力学角度来看都比较复杂,一个简单的质点二体问题事实上是不存在的。严格地说,质点型的 N 体问题亦与真实天文背景有距离。但是在一定条件下,可以用简化的动力模型来描述真实的天体背景,而且这样做确是有效的,无论从定量或定性角度来看都是有意义的。

二、受摄力学系统的建立

尽管动力模型很复杂，但大多数天体系统都有一个共同特征：对于运动天体（即所要讨论的天体）而言，它在该系统中所受到的各种力学作用，只有一"项"是主要的，其它作用相对较小。因此，可以将这样的系统处理成一个受摄二体系统。例如，太阳、地球、木星三体系统，讨论地球或木星（作为运动天体）的运动时，太阳引力是主要的，这就可以构成一个受摄二体问题，中心引力天体是太阳，运动天体是两个行星之一，而另一个即为摄动天体。再如，讨论人造卫星绕地球运动时，也是一个典型的受摄二体系统，作为质点的地球（即质量分布均匀的球体）是该系统的中心引力体，其引力作用是主要的，而非球形部分对应的修正项即为摄动体。

考虑一个可以归结为受摄二体问题的 n 体系统，相应的各天体的质量分别记作 $m_1, m_2, \cdots, m_n$。不失一般性，就令 m_1 作为该系统的中心天体，且记 $M=m_1$，并采用运动坐标系 M-xyz（见图 1），坐标原点即中心天体 M 的质心。如果 n 个天体均可看成质点，则各天体 $m_i(i=2,3,\cdots,n)$ 相对中心天体 M 的运动方程为

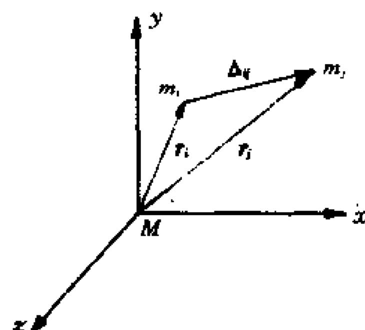


图 1　运动坐标系 M-xyz

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=-\frac{G(M+m_i)}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i-G\sum_{j=2}^{n}m_j\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3}+\frac{\boldsymbol{r}_j}{r_j^3}\right)\quad j\neq i \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{ij}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j \tag{2}$$

方程(1)中的 G 是万有引力常数。

对于受摄二体问题，一般有

$$m_j \ll M \quad (j=2,3,\cdots,n) \tag{3}$$

如太阳系中太阳和大行星组成的力学系统；或

$$r_i \ll (r_j, \Delta_{ij}) \quad (j\neq i) \tag{4}$$

如月球绕地球运动考虑太阳摄动时，人造卫星绕地球运动考虑太阳摄动时，即如此。当然，也有同时满足上述两个条件的。满足上述条件时，运动方程(1)右端的第一项比第二大项大得多。若将这两项分别记作 $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_1$，则方程(1)可写成下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_1 \quad (i=2,3,\cdots,n) \tag{5}$$

并有

$$\frac{F_1}{F_0}=O(\varepsilon),\ \ \varepsilon\ll 1 \tag{6}$$

$\boldsymbol{F}_1$ 即称为摄动力（实为摄动加速度）。如果在该 n 体系统中，还存在其它力学因素，且对 m_i 运动的影响亦相对较小，同样称为摄动因素，仅仅使 $\boldsymbol{F}_1$ 增加一些内容，只不过各种摄动因素的性质可能大不相同，并不局限于方程(1)右端第二大项那种保守力。

对于上述受摄二体问题，一个很好的近似是考虑 $\varepsilon=0$ 的情况，此时有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_0=-\frac{G(M+m_i)}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i \tag{7}$$

在该系统中只有运动天体和中心天体，此即二体问题，它是可积的。该问题的解是完整系统

(5)的一个近似(在摄动解中,称它为零阶近似),并可以此解作为参考解,去求受摄系统(5)的完整解。

当然,在具体处理复杂力学系统(5)时,首先令 $\varepsilon=0$,用二体问题的解作为参考解并不是唯一的办法,根据不同问题的特点和需要,曾出现过多种方法,例如,将 $\boldsymbol{F}_1$ 中的主要部分并入 $\boldsymbol{F}_0$ 中,作为原问题(5)的一个参考系统。这类方法,一般应满足以下两点:

1. 参考系统必须是"可积"的,并能给出相应解的具体表达式。

2. 要便于在此基础上求剩余摄动(即 $\boldsymbol{F}_1$ 的剩余部分引起的变化)。

尽管这一参考系统的解与二体问题的解一样,都是原系统(5)的一个近似,但通常却把这种同时考虑了部分摄动的解对应的轨道称为问题(5)的中间轨道。事实上,二体问题解对应的轨道亦是一种中间轨道。由于目前已找出的各类中间轨道解,都比二体问题的解复杂,尽管它们更接近真实轨道解,但要在它的基础上求剩余摄动都比较麻烦。因此,在天体力学中比较成熟而常用的方法,还是以二体问题的解作为参考解。不过,在某些问题中,无论是分析方法还是数值方法,都在不同程度上引用了中间轨道的思想和某些处理方法(如经典的月球运动理论等),这将在本书的有关章节中分别介绍。至于有关中间轨道理论的详细内容,读者可参阅有关书籍,作者曾在《人造地球卫星轨道力学》(高等教育出版社 1992 年出版)一书的第十二章中作过较全面的介绍。

对于那些不能构成受摄二体问题的 $N(N\geqslant3)$ 体问题,除特殊情况外,一般不能给出分析解,仍然停留在定性研究上,或采用数值方法给出必要的离散解。至于数值方法,对所要解决问题的动力模型没有任何特殊限制。鉴于上述情况,本书主要针对受摄二体问题模型,介绍近代天体力学常用的几类分析方法及其有关内容,同时也结合天体运动的特点(包括受摄二体问题中的小参数方程),专门介绍有关的数值方法,共有两章。

三、空间坐标系与时间系统

研究天体运动常采用的空间坐标系主要有三种:地平坐标系、赤道坐标系和黄道坐标系。一个空间坐标系应包含三个要素:坐标原点、参考平面(xy 平面)和该平面的主方向(x 轴方向)。

地平坐标系(Horizontal System)。确切地说应该是站心地平坐标系,坐标原点为观测站"中心",参考平面为过站心与地球参考椭球体相切的平面(地平面),其主方向是地平面中朝北的方向,即天球上的北点(N)方向,该坐标系的 z 轴方向即天球上的天顶(Z)方向,见图 2。

赤道坐标系(Equatorial System)。该坐标系又分站心赤道坐标系和地心赤道坐标系。前者的原点在站心,后者则在地心,即地球质心,参考平面是地球赤道面,但要注意,对于站心赤道坐标系,参考平面与地球赤道面平行,而在天球上两者合一,主方向都是春分点(γ)方向。因此,这两个坐标系之间只是一个平移关系。

黄道坐标系(Ecliptic System),也可分地心黄道坐标系和日心黄道坐标系。坐标原点各为地心和日心,参考平面都是地球绕日运动的轨道面,即黄道面,而主方向仍是春分点方向。

地平坐标系与赤道坐标系之间、赤道坐标系与黄道坐标系之间的几何关系,分别见图 2 和图 3,图中各符号均为天文上常用的符号。

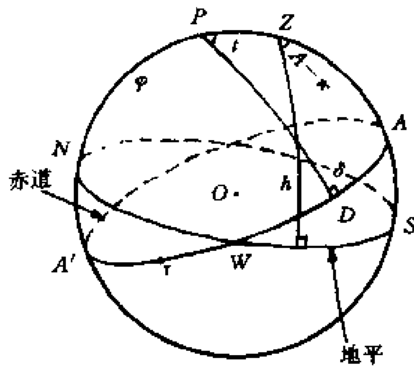


图 2　地平坐标系与赤道坐标系

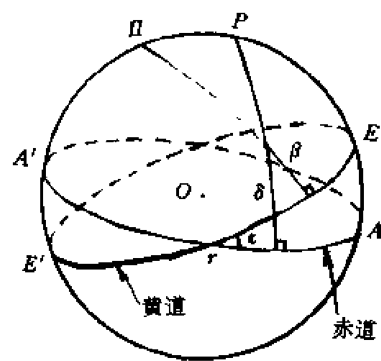


图 3　赤道坐标系与黄道坐标系

在上述地平、地心赤道和日心黄道坐标系中，天体的坐标矢量各记为 $\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$，相应的球坐标各记为 $\rho, A, h; r, \alpha, \delta$ 和 R, λ, β。其中 ρ，r 和 R 各为天体到坐标原点的距离。A 为地平经度，从北点沿地平经圈向东点（E）方向（顺时针方向）计量，h 为地平高度，它与天顶距 z 的关系为 $h=90°-z$；α 为赤经，从春分点方向沿赤道向东计量，δ 是赤纬；λ 是黄经，从春分点方向沿黄道向东计量，β 是黄纬。在相应的直角坐标系中，有下列关系存在：

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\begin{pmatrix}\cos h\cos A\\ -\cos h\sin A\\ \sin h\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{r}=r\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{R}=R\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix} \tag{10}$$

关于地平经度 A 的度量，也有从南点（S）沿地平经圈向东（逆时针方向）计量的，相应的(8)式则改为

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\begin{pmatrix}\cos h\cos A\\ \cos h\sin A\\ \sin h\end{pmatrix} \tag{11}$$

站心赤道坐标系和地心黄道坐标系中的位置矢量则用 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{R}'$ 表示，相应的表达式分别与 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的表达式相同，只是 r 改为 r'，R 改为 R'，α, δ 和 λ, β 应理解为站心赤道坐标和地心黄道坐标。

上述几种坐标之间的转换关系是简单的，仅涉及到平移和旋转，有

$$\boldsymbol{r}'=R_z(\pi-S)R_y\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\boldsymbol{\rho} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_A \tag{13}$$

$$\boldsymbol{R}'=R_x(\varepsilon)\boldsymbol{r} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{R}_E \tag{15}$$

其中，φ 是测站的天文纬度，S 是春分点的时角，即测站的地方恒量时（见图 2），$\boldsymbol{r}_A$ 是地面测站的地心坐标矢量，ε 是黄赤交角，$\boldsymbol{R}_E$ 是地心的日心坐标矢量。上述坐标转换中涉及到的旋转矩阵由下式表达：

$$R_x(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{16}$$

$$R_y(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{17}$$

$$R_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{18}$$

对于太阳系动力学，讨论大行星和小行星的运动时，采用的是日心黄道坐标系，而在人造地球卫星动力学中采用的则是地心赤道坐标系。由于岁差章动和地极移动等原因，上述坐标系的参考平面和春分点方向等都将发生变化，这就使得空间坐标系的选取复杂化。在许多实际问题中，采用的是历元平赤（黄）道坐标系，例如近年来采用的是 J2000 赤（黄）道坐标系，参考平面和主方向分别为平赤（黄）道面和平春分点，它将涉及到岁差章动和极移等多种改正。有关知识在各种球面天文学的教材中都有详细介绍，关于地球卫星动力学中的各种地心坐标系，在本章参考文献[1]的第一章中亦有详细介绍。

讨论各种天体运动时，除空间坐标系外，还涉及到时间系统。就运动而言，既需要一个联系天体位置测量的时间系统，又需要一个反映天体运动过程的均匀时间尺度，地球自转曾作这两种时间系统的统一基准。但由于地球自转的不均匀性和测量精度的不断提高，问题也复杂化了，既要有一个均匀时间基准，又要与地球自转相协调（联系到对天体的测量），因此就导致了下述几种时间系统。

恒星时(ST)。春分点连续两次过中天的时间间隔称为一"恒星日"，那么，恒星时就是春分点的时角，它的数值 S 等于上中天恒星的赤经 α，即

$$S=\alpha \tag{19}$$

这是经度 λ（不要与黄经混淆）的地方恒星时。与下述世界时密切相关的格林威治(Greenwich)恒星时 S_0 由下式给出：

$$S_0=S-\lambda \tag{20}$$

格林威治恒星时又有真恒星时（或称视恒星时）GAST 与平恒星时 GMST 之分。既然恒星时是由地球自转所确定，那么地球自转的不匀匀性就可通过它与均匀时间尺度的差别来测定。

世界时(UT)。与恒星时相同，世界时也是根据地球自转测定的时间，它以平太阳日为单位，1/86400 平太阳日为秒长。根据天文观测直接测定的世界时，记为 UT0，它对应于瞬时极的子午圈。加上引起测站子午圈位置变化的地极移动的修正，就得到对应平均极的子午圈的世界时，记为 UT1，即

$$\mathrm{UT1}=\mathrm{UT0}+\Delta\lambda \tag{21}$$

$\Delta\lambda$ 是极移改正量。

由于地球自转的不均匀性，UT1 并不是均匀的时间尺度。而地球自转不均匀性呈现三种

特性:长期慢变化(每百年使日长增加1.6毫秒),周期变化(主要是季节变化,一年里日长约有0.001秒的变化,除此之外还有一些影响较小的周期变化)和不规则变化。这三种变化不易修正,只有周年变化可用根据多年实测结果给出的经验公式进行改正,改正值记为ΔT_s,由此引进世界时UT2:

$$UT2=UT1+\Delta T_s \tag{22}$$

相对而言,这是一个比较均匀的时间尺度,但它仍包含着地球自转的长期变化和不规则变化,特别是不规则变化,其物理机制尚不清楚,至今无法改正。

周期项ΔT_s的振幅并不大,而UT1又直接与地球瞬时位置相联系,因此,对于一般精度要求不太高的问题,就可用UT1作为统一的时间系统。而对于高精度问题,即使UT2也不能满足,必须寻求更均匀的时间尺度,这正是下面要介绍的另一类时间系统。

国际原子时(TAI),这是一种标准频率。1967年10月第十三届国际计量大会上通过了一种新的秒长定义,即铯原子C_s^{133}基态的两能级间跃迁辐射的9192631770周所经历的时间间隔作为1秒的长度,称为国际单位秒(SI)。由这种时间单位确定的时间系统称为国际原子时(TAI),它的起算点靠近1958年1月1日的UT2 0时,有

$$(TAI-UT2)_{1958.0}=-0^s.0039 \tag{23}$$

动力学时——地球动力学时(TDT)和质心动力学时(TDB)。因上述原子时TAI是在地心参考系中定义的具有国际单位制秒长的坐标时间基准,从1984年起,它就取代历书时(ET)正式作为动力学中所要求的均匀时间尺度。由此引入一种地球动力学时(TDT,1991年后改称地球时TT),它与原子时TAI的关系为

$$TDT=TAI+32^s.184 \tag{24}$$

这一关系是根据1977年1月1日$00^h00^m00^s$(TAI)对应TDT为1977年1月$1^d.0003725$而来,此起始历元的差别就是该时刻历书时与原子时的差别。这样定义起始历元就便于用TDT系统代替ET系统。

显然,TDT是地心时空标架的坐标时,用作视地心历表的独立变量。在人造地球卫星动力学中,它就是一种均匀时间尺度,相应的运动方程即用它作为自变量。除此之外,对于太阳系动力学,还定义一种质心动力学时TDB,即太阳系质心时空标架的坐标时。它是一种抽象、均匀的时间尺度,月球、太阳和行星的历表都是以TDB为独立变量的,岁差、章动的计算公式也是依据该时间尺度的。

上述两种动力学时的差别(TDB-TDT)是由相对论效应引起的,它们之间的转换关系仍在讨论中,文[2]曾给出过它们之间的一种转换公式,其中最大的一项为

$$1^s.658\times10^{-3}\sin E$$

E是地月系质心绕日轨道的偏近点角。

除上述时间系统外,在计算中常常会遇到历元的取法以及几种年的长度问题。一种是贝塞耳(Bessel)年,或称假年,其长度为平回归年的长度,即365.2421988平太阳日。常用的贝塞耳历元是指太阳平黄经等于280°的时刻,例如1950.0,并不是1950年1月1日0时,而是1949年12月31日$22^h09^m42^s$(世界时),相应的儒略(Julian)日为2433282.4234。另一种就是儒略年,其长度为365.25平太阳日。儒略历元是指真正的年初,例如1950.0,即1950年1月1日0时。显然,引用儒略年较为方便,因此,从1984年起,贝塞耳年被儒略年代替。这两种历元之间的对应关系列于表1。

表 1　两种历元的儒略日

贝塞耳历元	儒略历元	儒略日
1900.0	1900.000858	2415020.3135
1950.0	1949.999790	2433282.4234
2000.0	1999.998722	2451544.5333
1989.999142	1900.0	2415020.0
1950.000210	1950.0	2433282.5
2000.001278	2000.0	2451545.0

为了方便，常用修改的儒略日(MJD)，定义为

$$MJD-JD-2400000.5 \tag{25}$$

例如 JD1950.0 对应 MJD=33282.0。

与上述两种年的长度对应的回归世纪(即 100 年)和儒略世纪的长度分别为 36524.22 平太阳日和 36525 平太阳日。

四、计算单位

对于不同的时空尺度，为了计算和公式表达的方便，采用不同的计算单位是很自然的。对于一个动力学问题，首先要提到的是引力常数 G 的数值及其量纲，目前采用的值为

$$G=6.672\times10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} \tag{26}$$

这里符号 m 是米，kg 是千克，s 是秒。但由天文观测直接测得的是地心引力常数 GE，E 是地球质量，有

$$GE=3.986005\times10^{14}\mathrm{m^3s^{-2}} \tag{27}$$

相应的几个导出常数——日心引力常数 GS、太阳质量 S 和日地质量比分别为

$$\left.\begin{aligned} &GS=1.32712438\times10^{20}\mathrm{m^3s^{-2}}\\ &S=1.9891\times10^{30}\mathrm{kg}\\ &S/E=332946.0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

在讨论大行星和小行星的运动时，常采用太阳质量、天文单位($AU=1.49597870\times10^{11}$m)和平太阳日作为基本单位。那么引力常数将变为

$$G=2.959122083\times10^{-4} \tag{29}$$

相应的高斯(Gauss)引力常数 k 为

$$k=\sqrt{G}=0.01720209895 \tag{30}$$

如果为了公式表达方便，让引力常数 $G=1$，则相应的时间单位将为

$$T=(AU^3/GS)^{1/2}=58.13244091\ \text{平太阳日} \tag{31}$$

在人造地球卫星的有关工作中，常用的计算单位有两种，一是 kg，m，s(千克、米、秒)，引力常数 G 即(26)式给出的值；另一种是地球质量、地球参考椭球体的赤道半径，且使引力常数 G

$=1$，相应的时间单位则为

$$T=(a_e^3/GE)^{1/2}=13.446860\text{min}$$
$$=806.8116\text{s} \tag{32}$$

其中 GE 即前面(27)式给出的地心引力常数值，$a_e=6378140\text{m}$。在人造地球卫星精密定轨中，时间单位 T 常用$(a_e^3/GE)^{1/2}$表达，使得采用计算机计算时能保留足够多的有效字长。

参 考 文 献

[1] 刘林，《人造地球卫星轨道力学》，高等教育出版社，1992 年。

[2] Moyer，T. D. ，*Celest. Mech*，23(1981)，33～56.

第一章　二体问题的基本关系式及其应用

在绪论中已指出，对于受摄力学系统，最常用的模型是受摄二体问题，二体问题的解就作为解决相应问题的基础。因此，尽管在《天体力学基础》[1]一书中对二体问题已有详尽的介绍，作为《天体力学方法》这本书，对此基础问题仍需再作必要的阐述，并针对解决受摄二体问题的具体情况，着重讨论椭圆运动，给出各种常用关系式和它的应用。同时还介绍广义力场中的二体问题，即两个相距为 r 的天体 m_1 和 m_2 之间的引力 F 不同于牛顿万有引力，有

$$\boldsymbol{F}=-\frac{Gm_1m_2}{r^N}\boldsymbol{r},\quad N>2$$

如中心天体为扁球体的二体系统，考虑广义相对论效应的二体问题，以及星系中恒星在星系自引力作用下的运动等，都会遇到这种情况。

1.1　二体问题的可积性与六个积分

作为二体问题，两个天体均作为质点对待。分别将该二天体的质量记作 M 和 m，讨论天体 m 相对天体 M 的运动。此时可将绪论中的运动方程(6)改写为下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{G(M+m)}{r^2}\hat{r}\tag{1.1}$$

$\hat{r}=\boldsymbol{r}/r$ 是 M 到 m 方向(径向)的单位矢量。关于相应的运动坐标系 O-XYZ(图 1.1)，其原点 O 当然在天体 M 上(注意，此时 M 是质点)，但基本平面(XY 坐标面)可有多种选取。根据天体力学问题的具体特点，对于人造地球卫星的运动，XY 平面与地球赤道面一致，而处理太阳系中大行星和小行星的运动问题，往往取日心黄道面作为 XY 平面，在讨论自然卫星运动时，则与讨论人造地球卫星的运动有些相似，即取各大行星的赤道面作为 XY 平面。至于 X 轴方向的确定，对于太阳系而言，无论是讨论行星运动，还是人造地球卫星的运动，几乎都是取春分点方向作为 X 轴方向。另外，有关赤道面、黄道面以及春分点方向的变化，对基本平面(XY 坐标面)和基本方向(X 轴方向)的选取有何影响，这里不再一一细谈，读者可在各有关问题的讨论中获知，本章参考文献[2]的第一章和第十一章有专门讨论。

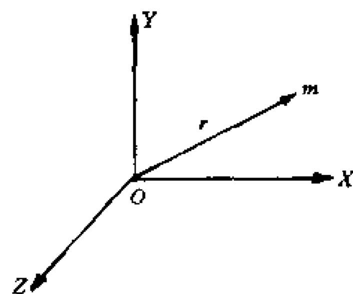


图 1.1　坐标系 O-ZYZ

为了简便，常记

$$\mu=G(M+m)\tag{1.2}$$

方程(1.1)对应的是一有心力问题，不仅是可积的(这里的可积是指上述微分方程的解可以写成求积形式)，而且可以具体给出六个积分的完整表达式。下面将作这一介绍，并在给出六个积分的同时，指出如何判断它是可积的，从而可以使读者了解到与其类似的广义力场中的二体问题为什么也是可积的。

1. 动量矩积分(或称面积积分)

根据有心力的性质，可直接写出方程(1.1)的动量矩积分，由方程(1.1)亦容易推出该积分。若记 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ 为面积速度矢量，则由方程(1.1)可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=0$$

这表明 $\boldsymbol{h}$ 为一常矢量，天体 m 相对 M 的运动为一平面运动。相应的动量矩积分可写成下列形式：

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=h\hat{R} \tag{1.3}$$

其中 $h=|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|$ 为面积速度常数，单位矢量 $\hat{R}$ 即表示面积速度的方向，它是天体运动平面的法向单位矢量。

如果用天体运动轨道来描述面积积分常数，则可引用辅助天球(见图 1.2)，图中大圆 AA' 和 BB' 分别表示基本平面(XY 坐标面)和运动天体轨道在辅助天球上的投影，R 方向即轨道面法向，i 就是轨道面与基本平面的夹角，Ω 即轨道升交点方向 N(或称节点)的经度，从 X 方向起量。在此坐标系中，利用球面三角的余弦公式，不难导出，法向单位矢量 $\hat{R}$ 的表达式为

$$\hat{R}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin i\ \sin\Omega\\-\sin i\ \cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

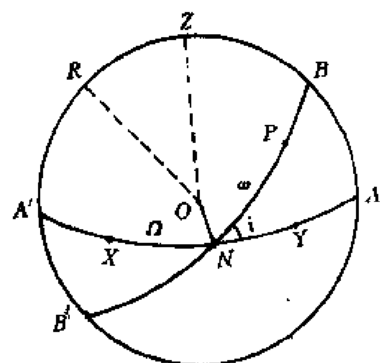


图 1.2 辅助天球

面积积分(1.3)包含了 h,i,Ω 三个积分常数，h 是面积速度的两倍，i,Ω 则确定了轨道平面的空间方向。

从积分(1.3)的导出过程不难看出，只要是有心力，即

$$\boldsymbol{F}=F(r,\lambda,\varphi)\boldsymbol{r} \tag{1.5}$$

必存在积分(1.3)，并不要求如同方程(1.1)右端的 $F(r)\hat{r}$ 那种简单形式。λ,φ 是常用的球坐标的另两个分量，即经纬度。

2. 运动平面内的轨道积分和活力公式

既然是平面运动，而相应的平面已由(i,Ω)确定，那么，我们即可在这一确定的平面内讨论降阶后的方程。引入平面极坐标(r,θ)，运动方程(1.1)的径向分量为

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\mu}{r^2} \tag{1.6}$$

而横向分量为

$$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})=0$$

此方程给出一积分：

$$r^2\dot{\theta}=h \tag{1.7}$$

由空间极坐标(三个轴方向的单位矢量分别记作 $\hat{r},\hat{\theta},\hat{k}$,$\hat{k}$ 即前面的 $\hat{R}$)中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式

$$\boldsymbol{r}=r\hat{r},\ \dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{1.8}$$

立即可得

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=r^2\dot{\theta}\hat{k}=r^2\dot{\theta}\hat{R} \tag{1.9}$$

这表明积分(1.7)就是动量矩积分(1.3)的标量形式。方程(1.6)和(1.7)构成了平面运动系统对应的三阶常微分方程,还需寻找三个独立积分。

上述方程的特点是不显含自变量 t,由常微分方程的基本知识可知,对于这类方程,通过分离 t 的方法可使方程降一阶,即能够首先讨论 r 对 θ 的变化规律。为此,记 $r'=\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$,$r''=\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}\theta^2$,由方程(1.7)得

$$\left.\begin{aligned}\dot{r}&=\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}r'\\ \ddot{r}&=\mathrm{d}\dot{r}/\mathrm{d}t=\frac{d\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\frac{h^2}{r^2}\left(-\frac{2}{r^3}r'^2+\frac{1}{r^2}r''\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

将这一关系代入方程(1.6),即可给出 r 对 θ 的二阶方程。但相应的方程仍不便于求解,如果在降阶的同时,再作变量变换：

$$r=1/u \tag{1.11}$$

有

$$\left.\begin{aligned}\dot{r}&=-hu'\\ \ddot{r}&=-h^2u^2u''\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

利用这一关系即可得到 u 对 θ 的一个二阶常系数线性方程：

$$u''+u=\frac{\mu}{h^2} \tag{1.13}$$

这显然是可积的。不难看出,如果将原方程(1.1)右端的 $-\mu/r^2$ 改为(或增加) $-\mu^*/r^N$,$N=0,\pm1,\pm2,\cdots$,同样可按上述方法处理,相应地有

$$u''+u=\frac{\mu^*}{h^2}u^{N-2} \tag{1.14}$$

或

$$u''+u=\frac{\mu}{h^2}+\frac{\mu^*}{h^2}u^{N-2} \tag{1.15}$$

虽然不再像方程(1.13)那么简单,但仍有不含自变量 θ 的特点,由常微分方程知识可知,对于这类方程,可令

$$u'=y,\quad u''=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \tag{1.16}$$

即可将其化为一种简单的可积形式。

方程(1.13)给出一轨道积分：

$$r=\frac{1}{u}=\frac{h^2/\mu}{1+e\cos(\theta-\omega)} \tag{1.17}$$

e 和 ω 即两个新积分常数。这是一圆锥曲线，在一定条件下它表示椭圆，中心天体（即 O 点）在其一个焦点上，考虑到本书的内容，主要讨论椭圆运动情况，至于抛物线和双曲线轨道，将在本章最后一节作一简单介绍。对于椭圆，可令

$$p=a(1-e^2)=h^2/\mu \tag{1.18}$$

那么积分(1.7)和(1.14)又可写成

$$r^2\dot{\theta}=\sqrt{\mu p}=\sqrt{\mu a(1-e^2)} \tag{1.19}$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)} \tag{1.20}$$

积分常数 h 由 a 代替。p 是椭圆的半通径，a 是半长径，e 是偏心率，ω 则称为运动天体 m 过近星(M)点 P 的经度（见图 1.2）。因在 P 点方向 $\theta=\omega$ 时，r 达到最小值，故称 P 点方向为近星点方向。注意，近星点经度 ω 和极坐标变量 θ 都是从节点 N 方向起量的，这在二体问题中无区别，当有摄动时，椭圆随时间变化，升交点方向也在变化，ω 应从这变化的升交点方向起量，而极坐标变量 θ 却仍应从一个不变方向起量，两者是有区别的。

将 $r=r(\theta)$ 的关系代入方程(1.19)，原则上可以给出最后一个与时间 t 有关的积分，这里暂时放一下，先导出椭圆运动的几个常用关系式。由(1.19)和(1.20)两式，经简单的运算即可得

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \tag{1.21}$$

此即活力公式。另外，既然是椭圆运动，那么运动天体的向径在一个周期 T 内扫过的面积就是椭圆的面积 $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$，由此可知两倍的面积速度 h 为

$$h=\sqrt{\mu a(1-e^2)}=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} \tag{1.22}$$

整理后可给出如下关系式：

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\mu}{4\pi^2} \tag{1.23}$$

若引进平均角速度 $n=2\pi/T$，则上式又可写成

$$n^2a^3=\mu \tag{1.24}$$

这两个表达式就是由万有引力定律导出的开普勒(Kepler)第三定律。

3. 第六个积分——Kepler 方程

为了运算方便，在寻找第六个积分时，不直接引用方程(1.19)按 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 求解，而是利用活力公式(1.21)按 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 积分，有

$$\dot{r}^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\mu\frac{p}{r^2}$$

通过(1.24)式消去 μ 整理后，得

$$n\mathrm{d}t=\frac{r\mathrm{d}r}{a\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} \tag{1.25}$$

对于椭圆轨道，r 的极大和极小值分别为

$$r_{max}=a(1+e), \quad r_{min}=a(1-e) \tag{1.26}$$

因此有$|a-r|\leqslant ae$,故可按下式引入辅助量 E:

$$a-r=ae\cos E$$

或写成

$$r=a(1-e\cos E) \tag{1.27}$$

代入(1.25)式得

$$n\mathrm{d}t=(1-e\cos E)\mathrm{d}E$$

由此便可给出第六个积分:

$$E-e\sin E=n(t-\tau) \tag{1.28}$$

这又称为 Kepler 方程,τ 是积分常数。当 $t=\tau$ 时,$E=0$,相应的 $r=a(1-e)=r_{min}$,故 τ 就是天体 m 过近星点的时刻。

最后引进两个角度 f 和 M,定义如下:

$$f=\theta-\omega, \quad M=n(t-\tau) \tag{1.29}$$

f,M 和 E 是三个角度量,分别称为真近点角、平近点角和偏近点角,都是从近星点开始计量。E 的几何意义见图 1.3,图中 O 是椭圆焦点(也是坐标系原点),O'是辅助圆的圆心。显然,在二体问题中,面积积分(1.7)可简化为

$$r^2\dot{f}=h \tag{1.30}$$

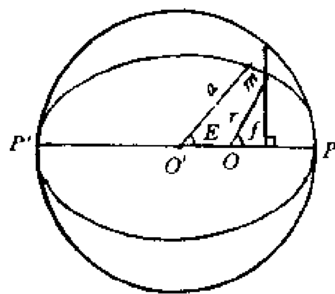


图 1.3　椭圆轨道和辅助圆

上述六个独立积分常数又称为轨道根数,只要初始条件给定,它们就完全被确定。a,e 是确定轨道大小和形状的根数;i,Ω 和 ω 是轨道平面和拱线(长半轴)的空间定向根数;而第六个根数 τ 常被三种近点角代替,特别是平近点角 M 常被引用,三种近点角本身都同时包含时间 t,而不是常数,即随 t 而变化,故也被称作时间根数。

1.2　椭圆运动的基本关系式

原则上说,上述六个积分就完全确定了二体问题意义下天体的运动,但这六个积分的表达形式有时使用不便,有必要在它们的基础上导出一些常用的关系式。这里将根据理论研究和实际工作的需要整理于下,所涉及到的量不外乎六个根数,时间 t、各种近点角、向径和速度等。

1. 椭圆运动中各量之间的几何关系

首先从图 1.3 和 Kepler 方程(1.28)不难看出,三种近点角的象限关系很清楚,它们同时处在[0,π]或[π,2π]区间上,这是一个很重要的关系,它们之间的联系即

$$r=\frac{a(1-e)^2}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E) \tag{1.31}$$

$$E-e\sin E=M \tag{1.32}$$

另外,根据椭圆的性质可知,图 1.3 中的$\overline{OO'}=ae$,于是有

$$r\cos f=a(\cos E-e) \tag{1.33}$$

由此可立即导出

$$r\sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin E \tag{1.34}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{E}{2} \tag{1.35}$$

2. 位置矢置(向径)$\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式

作为二阶方程(1.1)的完整解，应有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(t;c_1,c_2,\cdots,c_6)\\ \dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{\boldsymbol{r}}(t;c_1,c_2,\cdots,c_6)\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

既然六个积分已得到，那么可以写出(1.36)式的具体形式。这里的积分常数 $c_1, c_2, \cdots, c_6$ 即前面的六个轨道根数，其中 c_6 是 τ，如果改用平近点角 M，(1.36)式中的 t 将包含在 M 中。

显然有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= r\hat{\boldsymbol{r}}\\ &= r\cos f\hat{P} + r\sin f\hat{Q}\\ &= a(\cos E - e)\hat{P} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\hat{Q}\end{aligned} \tag{1.37}$$

其中 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 分别表示近星点和半通径方向的单位矢量。通过坐标旋转，很容易给出它们在直角坐标系 $O\text{-}XYZ$ 中的表达式。若在以轨道面作为 xy 平面的直角坐标系中，x 轴指向近星点方向，则相应的单位矢量 $\hat{P}_0$ 有下列形式：

$$\hat{P}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{1.38}$$

于是坐标系 $O\text{-}XYZ$ 中 $\hat{P}$ 的表达式将由下列矩阵旋转得到：

$$\hat{P} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\hat{P}_0 \tag{1.39}$$

其中三个旋转矩阵的形式如下：

$$R_z(-\omega) = \begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.40}$$

$$R_x(-i) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i & -\sin i\\ 0 & \sin i & \cos i\end{pmatrix} \tag{1.41}$$

$$R_z(-\Omega) = \begin{pmatrix}\cos\Omega & -\sin\Omega & 0\\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.42}$$

至于 $\hat{Q}$ 的表达式，只要将 $R_z(-\omega)$ 改为 $R_z(\alpha)$，$\alpha = -(\omega+90°)$ 即得。

为了某些应用的需要，我们将 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 的具体形式写出，即

$$\hat{P} = \begin{pmatrix}\cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i\\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i\\ \sin\omega\sin i\end{pmatrix} \tag{1.43}$$

$$\dot{Q}=\begin{pmatrix}-\cos\Omega\sin\omega-\sin\Omega\cos\omega\cos i\\-\sin\Omega\sin\omega+\cos\Omega\cos\omega\cos i\\\cos\omega\sin i\end{pmatrix}\tag{1.44}$$

关于 $\dot{\boldsymbol{r}}$，根据二体问题的性质，由 $\boldsymbol{r}$ 的表达式(1.37)可得

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial f}\dot{f}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial E}\dot{E}\tag{1.45}$$

由面积积分(1.30)给出的 $\dot{f}$ 或由 Kepler 方程(1.32)给出 $\dot{E}$，即可具体写出 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式，其形式如下：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}&=-\sqrt{\frac{\mu}{p}}[\sin f\hat{P}-(\cos f+e)\hat{Q}]\\&=-\frac{\sqrt{\mu a}}{r}[\sin E\hat{P}-\sqrt{1-e^2}\cos E\hat{Q}]\end{aligned}\tag{1.46}$$

有时需要将六个积分常数改用初值 $t=t_0,\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 来表达，即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t;t_0,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0)\\\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}(t;t_0,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0)\end{aligned}\right\}\tag{1.47}$$

这容易从表达式(1.37)和(1.46)转换而得。首先将 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 表达成 $r_0,\dot{r}_0$ 的形式，由

$$\left.\begin{aligned}r_0&=a(1-e\cos E_0)\hat{P}+a\sqrt{1-e^2}\sin E_0\hat{Q}\\\dot{r}_0&=\frac{\sqrt{\mu a}}{r_0}(-\sin E_0\hat{P}+\sqrt{1-e^2}\cos E_0\hat{Q})\end{aligned}\right\}\tag{1.48}$$

可解出 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$，以此代入(1.37)式和(1.46)式，经整理即可将 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ 用 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的“线性”组合来表达：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}=F\boldsymbol{r}_0+G\dot{\boldsymbol{r}}_0\\\dot{\boldsymbol{r}}=F'\dot{\boldsymbol{r}}_0+G'\boldsymbol{r}_0\end{aligned}\right\}\tag{1.49}$$

但 F,G,F',G' 仍与 $\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 有关，其形式如下：

$$\left.\begin{aligned}F&=1-\frac{a}{r_0}(1-\cos\Delta E)\\G&=\Delta t-\frac{1}{n}(\Delta E-\sin\Delta E)\end{aligned}\right\}\tag{1.50}$$

其中 $\Delta t=t-t_0,\Delta E=E-E_0$，而 a 和 ΔE 由下式计算：

$$a=\left(\frac{2}{r_0}-\frac{v_0^2}{\mu}\right)^{-1},\quad v_0^2=\dot{\boldsymbol{r}}^2\tag{1.51}$$

$$\Delta E=n\Delta t+\left(1-\frac{r_0}{a}\right)\sin\Delta E-\frac{r_0\dot{r}_0}{\sqrt{\mu a}}(1-\cos\Delta E)\tag{1.52}$$

$$n=\sqrt{\mu}a^{-3/2},\quad r_0\dot{r}_0=\boldsymbol{r}_0\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0\tag{1.53}$$

由于

$$\left(1-\frac{r_0}{a}\right)=O(e),\quad r_0\dot{r}_0/\sqrt{a}=O(e)$$

(1.52)式类似于 Kepler 方程，故 ΔE 的计算还是比较方便的，特别当 Δt 不大时，比解 Kepler 方程(解法在后面 1.6 中介绍)还快速。关于 F' 和 G'，根据 $F'=\dot{G},G'=\dot{F}$ 可导出

$$\left.\begin{aligned}F'&=1-\frac{a}{r}(1-\cos\Delta E)\\G'&=-\frac{1}{r}\left(\frac{\sqrt{\mu a}}{r_0}\sin\Delta E\right)\end{aligned}\right\}\tag{1.54}$$

不难看出，当 Δt 较小时，有

$$\left.\begin{aligned}F&=1+O(\Delta t^2)\\G&=\Delta t+O(\Delta t^3)\end{aligned}\right\}$$

关于这一展开式，本章参考文献[1]和[2]以及有关书籍中均有具体形式，为了引用方便，这里列出展开式的前几项，即

$$\left.\begin{aligned}F&=1-\left(\frac{1}{2}u_0\right)\Delta t^2+\left(\frac{1}{2}u_0p_0\right)\Delta t^3+\left(\frac{1}{8}u_0q_0-\frac{1}{12}u_0^2-\frac{5}{8}u_0p_0^2\right)\Delta t^4+O(\Delta t^5)\\G&=\Delta t-\left(\frac{1}{6}u_0\right)\Delta t^3+\left(\frac{1}{4}u_0p_0\right)\Delta t^4+O(\Delta t^5)\end{aligned}\right\}\tag{1.55}$$

其中

$$u_0=\frac{1}{r_0^3},\quad p_0=r_0\dot{r}_0/r_0^2,\quad q_0=v_0^2/r_0^2\tag{1.56}$$

相应地有

$$\left.\begin{aligned}F'&=1-\left(\frac{1}{2}u_0\right)\Delta t^2+(u_0p_0)\Delta t^3+O(\Delta t^4)\\G'&=(-u_0)\Delta t+\left(\frac{3}{2}u_0p_0\right)\Delta t^2+\left(\frac{1}{2}u_0q_0-\frac{1}{3}u_0^2-\frac{5}{2}u_0p_0^2\right)\Delta t^3+O(\Delta t^4)\end{aligned}\right\}\tag{1.57}$$

3. 椭圆运动中一些量对轨道根数的偏导数

在研究天体运动规律或计算其位置时，除用到六个根数 a,e,i,Ω,ω,M 外，还会涉及到它们构成的一些函数，这些函数关系中的基本量就是 E,f,r，只要导出这些量对根数的偏导数就够了。首先分析一下上述量与六个独立根数之间的函数关系，由方程(1.31)～(1.33)可知：

$$\begin{aligned}&E=E(e,M)\\&r=r(a,e,E(e,M))=r(a,e,M)\\&f=f\left(e,E(e,M),\frac{a}{r}(e,M)\right)=f(e,M)\end{aligned}$$

那么，利用前面的几何关系即可推出相应的偏导数，它们是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial E}{\partial e}=\left(\frac{a}{r}\right)\sin E,\quad \frac{\partial E}{\partial M}=\left(\frac{a}{r}\right)\\&\frac{\partial f}{\partial e}=\frac{1}{1-e^2}\left(1+\frac{p}{r}\right)\sin f,\quad \frac{\partial f}{\partial M}=\left(\frac{a}{r}\right)^2\sqrt{1-e^2}\\&\frac{\partial r}{\partial a}=\left(\frac{r}{a}\right),\quad \frac{\partial r}{\partial e}=-a\cos f,\quad \frac{\partial r}{\partial M}=\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f=\left(\frac{a}{r}\right)ae\sin E\end{aligned}\right\}\tag{1.58}$$

若独立根数 M 改为 E，则有

$$\begin{aligned}&M=M(e,E)\\&f=f(e,E)\\&r=r(a,e,E)\end{aligned}$$

相应地有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial M}{\partial e}=-\sin E,\quad \frac{\partial M}{\partial E}=(\frac{r}{a})=1-e\cos E\\&\frac{\partial f}{\partial e}=\frac{\sin f}{1-e^2},\quad \frac{\partial f}{\partial E}=(\frac{a}{r})\sqrt{1-e^2}\\&\frac{\partial r}{\partial a}=(\frac{r}{a}),\quad \frac{\partial r}{\partial e}=-a\cos E,\quad \frac{\partial r}{\partial E}=ae\sin E\end{aligned}\right\}\tag{1.59}$$

若独立根数 M 改为 f,则有

$$\begin{aligned}&E=E(e,f)\\&M=M(e,E(e,f))=M(e,f)\\&r=r(a,e,f)\end{aligned}$$

相应地有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial E}{\partial e}=-\frac{\sin E}{1-e^2},\qquad \frac{\partial E}{\partial f}=(\frac{r}{a})/\sqrt{1-e^2}\\&\frac{\partial M}{\partial e}=-[1+(\frac{r}{a})/(1-e^2)](\frac{r}{a})\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}},\frac{\partial M}{\partial f}=(\frac{r}{a})^2/\sqrt{1-e^2}\\&\frac{\partial r}{\partial a}=(\frac{r}{a}),\frac{\partial r}{\partial e}=-\frac{r}{1-e^2}(\cos E+e),\frac{\partial r}{\partial f}=(\frac{r}{a})^2(\frac{ae}{1-e^2})\sin f\end{aligned}\right\}\tag{1.60}$$

在实际应用中,常常出现$(\frac{a}{r})$这一因子,由 $\partial r/\partial\sigma$ 可直接得到 $\partial(\frac{a}{r})/\partial\sigma$。显然,$(\frac{a}{r})$只是 e 和近点角的函数,因此有

$$\frac{\partial(\frac{a}{r})}{\partial e}=(-\frac{a}{r^2})(\frac{\partial r}{\partial e}),\quad \frac{\partial(\frac{a}{r})}{\partial\theta}=(-\frac{a}{r^2})(\frac{\partial r}{\partial\theta})$$

其中 θ 是 M,E,f 中的一个。

对于小偏心率问题,往往不采用上述六个根数作为基本变量,而改用

$$a,i,\Omega,\xi=e\cos\omega,\quad \eta=-e\sin\omega,\quad \lambda=M+\omega$$

六个变量,f,E 将由 $u=f+\omega,v=E+\omega$ 代替。若要推出相应的偏导数,其关键仍在于首先分析清楚函数关系。由

$$e^2=\xi^2+\eta^2,\quad \omega=\mathrm{tg}^{-1}(-\eta/\xi),\quad M=\lambda-\mathrm{tg}^{-1}(-\eta/\xi)\tag{1.61}$$

可知

$$\begin{aligned}&f=f(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda))\\&E=E(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda))\\&\frac{a}{r}=\frac{a}{r}(e(\xi,\eta),M(\xi,\eta,\lambda))\end{aligned}$$

利用这一关系再推导相应的偏导数,显然是容易的,例如

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{a}{r})=\frac{\partial}{\partial e}(\frac{a}{r})\frac{\partial e}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial M}(\frac{a}{r})\frac{\partial M}{\partial\xi}\\&\frac{\partial}{\partial\eta}(\frac{a}{r})=\frac{\partial}{\partial e}(\frac{a}{r})\frac{\partial e}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial M}(\frac{a}{r})\frac{\partial M}{\partial\eta}\\&\frac{\partial}{\partial\lambda}(\frac{a}{r})=\frac{\partial}{\partial M}(\frac{a}{r})\frac{\partial M}{\partial\lambda}\end{aligned}\right\}\tag{1.62}$$

其中$\frac{\partial}{\partial e}(\frac{a}{r})$，$\frac{\partial}{\partial M}(\frac{a}{r})$前面已给出，剩下的问题只是根据上述函数关系(1.61)式去推$\frac{\partial e}{\partial \xi}$，$\frac{\partial M}{\partial \xi}$，…，这对读者来说是极其简单的，就作为习题留给读者自己补全。

在定轨问题中，还会用到$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma}$，$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma}$这两组偏导数。由$\boldsymbol{r}$和$\dot{\boldsymbol{r}}$的表达式(1.37)和(1.46)不难得知，它们分别涉及到两类偏导数，如果仍用a,e,i,Ω,ω,M作为基本变量σ，则一类偏导数是前面已导出的$\frac{\partial(r,f,E)}{\partial(a,e,M)}$，另一类是单位矢量$\hat{P}$和$\hat{Q}$对三个角度量的偏导数，即$\frac{\partial \hat{P}}{\partial(i,\Omega,\omega)}$，$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial(i,\Omega,\omega)}$，直接由$\hat{P}$和$\hat{Q}$的表达式(1.43)和(1.44)可以推导，但不便于将结果写成简单形式，若用矢量旋转法就方便得多，具体过程可参阅本章参考文献[2]的第十四章，这里将写出具体结果，有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a}=\frac{1}{a}\boldsymbol{r}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial e}=H\boldsymbol{r}+K\dot{\boldsymbol{r}}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial M}=\frac{1}{n}\dot{\boldsymbol{r}}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i}=\hat{J}_N\times\boldsymbol{r}=\frac{z}{\sin i}\hat{R},\quad \hat{J}_N=\begin{pmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{pmatrix}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \Omega}=\hat{J}_z\times\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix},\quad \hat{J}_z=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \omega}=\hat{R}\times\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}zR_y-yR_z\\ xR_z-zR_x\\ yR_x-xR_y\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}\tag{1.63}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial a}=-\frac{1}{2a}\dot{\boldsymbol{r}}\\
&\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial e}=H'\boldsymbol{r}+K'\dot{\boldsymbol{r}}\\
&\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial M}=-n(\frac{a}{r})^3\boldsymbol{r}=-\frac{\mu}{n}(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})\\
&\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial i}=\hat{J}_N\times\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\dot{z}}{\sin i}\hat{R}\\
&\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \Omega}=\hat{J}_z\times\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\\ 0\end{pmatrix}\\
&\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \omega}=\hat{R}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\dot{z}R_y-\dot{y}R_z\\ \dot{x}R_z-\dot{z}R_x\\ \dot{y}R_x-\dot{x}R_y\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}\tag{1.64}$$

其中$\hat{R}$即轨道面法向单位矢量，其表达式即前面的(1.4)式，又可写成下列形式：

$$\hat{R}=\frac{1}{\sqrt{\mu p}}(r\times\dot{r}) \tag{1.65}$$

相应地有

$$\sin i=\sqrt{1-\cos^2 i}=\sqrt{1-R_z^2} \tag{1.66}$$

而 H,K,H',K' 则由下列各式表达：

$$H=-\frac{a}{p}(\cos E+e),\quad K=\frac{\sin E}{n}(1+\frac{r}{p}) \tag{1.67}$$

$$H'=\frac{\sqrt{\mu a}\sin E}{rp}[1-\frac{a}{r}(1+\frac{p}{r})],\quad K'=\frac{a}{p}\cos E \tag{1.68}$$

4. 近点角 M,E,f 与时间 t 之间的微分关系

根据三种近点角的定义，利用面积积分(1.30)和 Kepler 方程(1.32)以及上述关系，可给出

$$\frac{dM}{dt}=n,\quad \frac{dE}{dt}=n(\frac{a}{r}),\quad \frac{df}{dt}=n\sqrt{1-e^2}(\frac{a}{r})^2 \tag{1.69}$$

在后面有关章节要讨论的问题中，积分时将会遇到上述几种变量之间的转换，为了应用方便，不妨根据(1.69)式将这些关系整理如下：

$$dM=ndt=(\frac{r}{a})dE=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}(\frac{r}{a})^2df \tag{1.70}$$

$$dE=n(\frac{a}{r})dt=(\frac{a}{r})dM=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}(\frac{r}{a})df \tag{1.71}$$

$$df=n\sqrt{1-e^2}(\frac{a}{r})^2dt=\sqrt{1-e^2}(\frac{a}{r})^2dM=\sqrt{1-e^2}(\frac{a}{r})dE \tag{1.72}$$

$$dt=\frac{1}{n}dM=\frac{1}{n}(\frac{r}{a})dE=\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}(\frac{r}{a})^2df \tag{1.73}$$

注意，这组微分关系是建立在六个轨道根数为常数基础上的，严格地说，它们仅适用于二体问题，这与前面的几何关系式和偏导数关系式不一样。

1.3 椭圆运动的展开式

在很多问题中，需要将有关量通过平近点角 M 表示成时间 t 的显函数，但由 Kepler 方程可知，这必将涉及到超越函数关系，无法直接达到上述要求。因此，必须将 $f,E,(\frac{a}{r})$ 等量展成 M 的三角级数，而在这些展开式中又要用到两个特殊函数：第一类贝塞耳(Bessel)函数和超几何函数(或称超几何级数)，故首先简单地介绍一下这两个函数的有关知识，详细内容请翻阅特殊函数一类书籍。

第一类贝塞耳函数 $J_n(x)$ 是二阶线性常微分方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

的一个解，它由下列级数表达：

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!\ k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \tag{1.74}$$

其中 n 为整数($n=0,1,2\cdots$)，x 为任意实数，而 $k!$ 由下式定义：

$$\left.\begin{aligned}&k!\ =k(k-1)\cdots(k-(k-2))\cdot 1\\&0\,!=1\end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

$J_n(x)$又是 $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$展开式的系数，即

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)z^n \tag{1.76}$$

其中 e 是自然对数的底，而 z 可以是复变量。由此可给出 $J_n(x)$的积分表达式，即

$$\begin{aligned}J_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\sqrt{-1}(x\sin\theta-n\theta)}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta\end{aligned} \tag{1.77}$$

根据 $J_n(x)$的定义，不难得出下列一些性质：

$$\left.\begin{aligned}&J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)\\&J_n(-x)=(-1)^nJ_n(x)\\&J_{-n}(-x)=J_n(x)\\&J_n(x)=\frac{x}{2n}[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)]\\&\frac{d}{dx}J_n(x)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]\end{aligned}\right\} \tag{1.78}$$

超几何级数 $F(a,b,c;x)$是二阶线性常微分方程

$$(x^2-x)y''+[(a+b+1)x-c]y'+aby=0$$

的一个解，即

$$\begin{aligned}F(a,b,c;x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!\ \cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n\\&=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\cdots\end{aligned} \tag{1.79}$$

其中 a,b,c 是常数。

1. $\sin kE$ 和 $\cos kE$ 的展开式

这里直接列出展开结果，它们在本章参考文献[3]～[5]中有详细的推导。对 $k>1$ 有：

$$\sin kE=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n}[J_{n-k}(ne)+J_{n+k}(ne)]\sin nM \tag{1.80}$$

$$\cos kE=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n}[J_{n-k}(ne)-J_{n+k}(ne)]\cos nM \tag{1.81}$$

对 $k=1$ 有：

$$\sin E=\frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM \tag{1.82}$$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)]\cos nM$$
$$= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[J_n(ne)]\cos nM \tag{1.83}$$

2. E, $\frac{r}{a}$ 和 $\frac{a}{r}$ 的展开式

由
$$E = M + e\sin E, \quad \frac{r}{a} = 1 - e\cos E, \quad \frac{a}{r} = \frac{\partial E}{\partial M}$$
立即可得

$$E = M + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne)\sin nM \tag{1.84}$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[J_n(ne)]\cos nM \tag{1.85}$$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos nM \tag{1.86}$$

3. $\sin f$ 和 $\cos f$ 的展开式

利用偏导数关系式(1.59)可得
$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{a}{r}\right)^{-1} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin f$$
于是有
$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right)$$
$$= 2\sqrt{1-e^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}e}[J_n(ne)]\sin nM \tag{1.87}$$
由轨道方程(1.20)给出
$$\cos f = \frac{1}{e}\left[-1 + (1-e^2)\frac{a}{r}\right]$$
$$= -e + \frac{2}{e}(1-e^2)\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos nM \tag{1.88}$$

4. f 的展开式

利用 $\sin f$ 或 $\cos f$ 的展开式，取到 e^4 项有
$$f = M + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \cdots\right)\sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \cdots\right)\sin 2M$$
$$+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \cdots\right)\sin 3M + \left(\frac{103}{96}e^4 - \cdots\right)\sin 4M + \cdots \tag{1.89}$$

5. $(\frac{r}{a})^n\cos mf$ 和 $(\frac{r}{a})^n\sin mf$ 的展开式

这里 n 和 m 均为任意整数(包括零)。若仅用上述基本展开式,要给出这两个函数对 M 的三角级数(特别是一般表达式),那是相当困难的。下面就对这两个函数直接进行傅里叶(Fourier)展开。函数 $F(f)$ 展成傅里叶级数的基本形式为

$$\left.\begin{aligned}&F(f)=\frac{a_0}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(a_p\cos pM+b_p\sin pM)\\&a_p=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(f)\cos pM\mathrm{d}M\\&b_p=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(f)\sin pM\mathrm{d}M\\&p=0,1,2\cdots\end{aligned}\right\}\tag{1.90}$$

$(\frac{r}{a})^n\cos mf$ 是偶函数,$b_p=0$,且

$$a_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{r}{a})^n[\cos(mf-pM)+\cos(mf+pM)]\mathrm{d}M\tag{1.91}$$

对于被积函数的第二部分,可令 $p=-p$,对应 $p=-1,-2,\cdots,-\infty$,于是有

$$(\frac{r}{a})^n\cos mf=\sum_{p=-\infty}^{\infty}X_p^{n,m}(e)\cos pM\tag{1.92}$$

其中

$$X_p^{n,m}(e)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{r}{a})^n\cos(mf-pM)\mathrm{d}M\tag{1.93}$$

$(\frac{r}{a})^n\sin mf$ 是奇函数,$a_p=0$,b_p 的计算公式为

$$b_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{r}{a})^n[\cos(mf-pM)-\cos(mf+pM)]\mathrm{d}M\tag{1.94}$$

对被积函数第二部分的处理同上,结果得

$$(\frac{r}{a})^n\sin mf=\sum_{p=-\infty}^{\infty}X_p^{n,m}(e)\sin pM\tag{1.95}$$

由于上述两个函数的展开式系数相同,可用指数形式将这两个函数用统一形式来表达,即

$$\left.\begin{aligned}&(\frac{r}{a})^n\exp(jmf)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}X_p^{n,m}(e)\exp(jpM)\\&X_p^{n,m}(e)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{r}{a})^n\exp[j(mf-pM)]\mathrm{d}M\end{aligned}\right\}\tag{1.96}$$

其中 $j=\sqrt{-1}$ 是虚数单位。因

$$\int_0^{2\pi}(\frac{r}{a})^n\sin(mf-pM)\mathrm{d}M=0$$

(1.96)式中的 $X_p^{n,m}(e)$ 就是由(1.93)式表达的 $X_p^{n,m}(e)$,称为汉森(Hansen)系数,它是偏心率 e 的函数,无法用初等函数来表达它的具体形式,只能引用贝塞耳函数和超几何级数,详细推导见本章参考文献[3]和[6],这里直接列出展开结果。

$$X_p^{n,m}(e)=(1+\beta)^{-(n+1)}\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q(pe)X_{p,q}^{n,m}\tag{1.97}$$

$$\beta=\frac{1}{e}(1-\sqrt{1-e^2})=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \tag{1.98}$$

$$X_{p,q}^{n,m}=\begin{cases}(-\beta)^{(p-m)-q}\begin{pmatrix}n-m+1\\p-m-q\end{pmatrix}F(p-q-n-1,-m-n-1,p-m-q+1,\beta^2) & (q\leqslant p-m)\\(-\beta)^{q-(p-m)}\begin{pmatrix}n+m+1\\q-p+m\end{pmatrix}F(q-p-n-1,m-n-1,q-p+m+1,\beta^2) & (q\geqslant p-m)\end{cases} \tag{1.99}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!},\quad \begin{pmatrix}-n\\m\end{pmatrix}=(-1)^m\begin{pmatrix}n+m-1\\m\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}n\\-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-n\\-m\end{pmatrix}=0,\quad \begin{pmatrix}n\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-n\\0\end{pmatrix}=1\end{array}\right\} \tag{1.100}$$

由(1.93)式即可给出

$$X_{-p}^{n,-m}=X_p^{n,m} \tag{1.101}$$

又根据 $J_q(pe)=O(e^{|q|})$ 可知：

$$X_p^{n,m}(e)=O(e^{|m-p|}) \tag{1.102}$$

例如

$$\left.\begin{array}{l}X_m^{n,m}(e)=1+\dfrac{1}{4}(n^2+n-4m^2)e^2+O(e^4)\\ X_{m+1}^{n,m}(e)=-\dfrac{1}{2}(n-2m)e+O(e^3)\\ X_{m-1}^{n,m}(e)=-\dfrac{1}{2}(n+2m)e+O(e^3)\\ X_{m+2}^{n,m}(e)=\dfrac{1}{8}[n^2-(4m+3)n+m(4m+5)]e^2+O(e^4)\\ X_{m-2}^{n,m}(e)=\dfrac{1}{8}[n^2+(4m-3)n+m(4m-5)]e^2+O(e^4)\end{array}\right\} \tag{1.103}$$

上述两个性质(1.101)式和(1.102)式在具体计算$(\frac{r}{a})^n\cos mf$ 和$(\frac{r}{a})^n\sin mf$ 的展开式时会用到。

以上各展开式的系数都是关于偏心率 e 的无穷级数，只有当 $e<e_1=0.6627\cdots$时才收敛，e_1 就称为拉普拉斯(Laplace)极限。

除上述展开式外，有些问题还需要其它类型的展开式，下面给出。

6. $(\frac{a}{r})^p$，E，$f-M$ 对 f 的展开式

$$(\frac{a}{r})^p=(1-e^2)^{-p/2}[T_0(p,0)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(p,0)\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}\beta^n\cos nf] \tag{1.104}$$

其中 p 为正负整数，β 的意义同前，见(1.98)式，$T_n(p,q)$由超几何级数定义[4]，即

$$T_n(p,q)\equiv F(-p-q,p-q+1,n+1,-\frac{\beta^2}{1-\beta^2}) \tag{1.105}$$

当 $p=-1,-2$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&T_n(-1,0)-T_0(-1,0)=1\\&T_n(-2,0)=\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)\\&T_0(-2,0)=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\end{aligned}\right\}\tag{1.106}$$

于是可得

$$\left(\frac{r}{a}\right)=\sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\beta^n\cos nf\right]\tag{1.107}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2=\sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+n\sqrt{1-e^2})\beta^n\cos nf\right]\tag{1.108}$$

利用这两个展开式，由

$$\frac{\partial E}{\partial f}=(1-e^2)^{1/2}\left(\frac{r}{a}\right),\quad\frac{\partial M}{\partial f}=(1-e^2)^{-1/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

积分可得

$$E=f+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\beta^n\sin nf\tag{1.109}$$

$$f-M=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^2}\right)\beta^n\sin nf\tag{1.110}$$

1.4 椭圆运动的一些平均值

采用受摄二体问题模型时，运动天体的真实轨道是一变化椭圆，而这些变化又包含周期项与非周期项两类性质截然不同的部分。为了计算和理论分析的需要，有必要将它们分开。可有些量无法直接看出其性质，如$\left(\frac{a}{r}\right)$，$\cos f$ 等，它们是 f 的周期函数，但对时间 t 积分时，在一个运动周期内的累积效果不为零(除非偏心率 $e=0$)。为此，可用求平均值的方法来加以区分。

任一函数 $F(t)$，在一个运动周期 T 内的平均值 $\bar{F}$ 定义为

$$\bar{F}=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t\tag{1.111}$$

若记 F_c 和 F_s 分别为周期项和非周期项，则显然有

$$F_c=\bar{F},\quad F_s=F-\bar{F}\tag{1.112}$$

于是，可用对一个运动周期求平均值的方法将周期项分离出来，相应的函数 F 即被分解成两个部分：

$$F(t)=F_c+F_s\tag{1.113}$$

从上述过程可以清楚地看出，在求积分(1.111)时，无论用什么方法，都不会影响由(1.112)式和(1.113)式表示的函数分解结果的严格性。因此，尽管这一分解是针对后面用有关方法求运动天体轨道摄动变化的需要，可这里计算积分(1.111)时，却能采用椭圆运动关系。当然，考虑摄动时，运动周期 T 及所有椭圆轨道根数均要发生缓慢的变化，但它不会改变周期项 F_s 的基本特征。因此，上述分解不仅严格，而且仍然保持原分解的意义。

讨论椭圆轨道摄动变化时所涉及到的摄动力，有各种各样的函数形式，但需要通过求平均值来分离周期项的，基本上有下面四类：

$$(\frac{a}{r})^p\sin qf,\quad (\frac{a}{r})^p\cos qf$$

$$(\frac{a}{r})^p(f-M)\sin qf,\quad (\frac{a}{r})^p(f-M)\cos qf$$

$$p,q=0,1,2,\cdots$$

另一些特殊形式，在有关章节中再讨论。

首先用几个实例来介绍求平均值的基本方法以及平均值的特征，并借此熟悉一下前面所介绍的各种椭圆关系式的具体应用。

1. $p=0,q=1$ **对应的** $\sin f$ **和** $\cos f$

$$\begin{aligned}\overline{\sin f} &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin f\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f\mathrm{d}M \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin f(\frac{r}{a})\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2}\sin E\mathrm{d}E = 0\end{aligned} \tag{1.114}$$

$$\begin{aligned}\overline{\cos f} &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos f\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos f(\frac{r}{a})\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos E-e)\mathrm{d}E = -e\end{aligned} \tag{1.115}$$

2. $p - 3,q - 0$ **对应的**$(\frac{a}{r})^3$

$$\begin{aligned}\overline{(\frac{a}{r})^3} &= \frac{1}{T}\int_0^T(\frac{a}{r})^3\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}(\frac{a}{r})\mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{-3/2}\int_0^{2\pi}(1+e\cos f)\mathrm{d}f = (1-e^2)^{-3/2}\end{aligned} \tag{1.116}$$

3. $p=-1,q=0$ **对应的**$(\frac{r}{a})$

$$\overline{(\frac{r}{a})} = \frac{1}{T}\int_0^T(\frac{r}{a})\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{r}{a})^2\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-e\cos E)^2\mathrm{d}E = 1+\frac{1}{2}e^2 \tag{1.117}$$

这三个例子，一方面可使我们看出求平均值的方法，基本上是引用时间 t 与近点角 E,f 之间的变换和相应的几何关系；另外，还可以看出对什么量求平均值很重要，例如 $\cos f$ 对 f 的平均值显然为零，而对 t 的平均值却是 $-e$，这正说明椭圆运动的不均匀性。

下面不加推导地将上述四类函数平均值的一般表达式直接写出来，以供读者查用，具体推导留给读者做为习题。

$$\overline{(\frac{a}{r})^p\sin qf}=0\quad (p,q=0,1,2,\cdots) \tag{1.118}$$

$$\overline{\cos qf}=(1+q\sqrt{1-e^2})(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}})^q\quad (q=0,1,2,\cdots) \tag{1.119}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = \left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q \quad (q=0,1,2\cdots) \tag{1.120}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p \cos qf} = \begin{cases} 0 & (p \geqslant 2, q \geqslant p-1) \\ (1-e^2)^{-(p-3/2)} \sum\limits_{n(2)=q}^{(p-2)-\delta} \begin{pmatrix} p-2 \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{2}(n-q) \end{pmatrix} \left(\frac{e}{2}\right)^n & (p \geqslant 2, q < p-1) \end{cases} \tag{1.121}$$

$$\delta = \frac{1}{2}[1-(-1)^{p-q}]$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M) \cos qf} = 0 \qquad (p \geqslant 0, q \geqslant 0) \tag{1.122}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2 (f-M) \sin qf} = -\frac{1}{q} \frac{\overline{\cos qf}}{\sqrt{1-e^2}} \quad (q \geqslant 1) \tag{1.123}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p (f-M) \sin qf} = (1-e^2)^{-(p-3/2)} \sum_{n=0}^{p-2} \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} p-2 \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \left(\frac{e}{2}\right)^n$$
$$\times \left(-\frac{\cos(q+n-2m)f}{q+n-2m}\right)_{2m \neq q+n} \qquad (p \geqslant 3, q \geqslant 1) \tag{1.124}$$

关于 $p=0,1$ 的情况，很少遇到，这里不再讨论。上述推导中要用到有关三角函数的两个表达式：

$$\sin^n f = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{\frac{1}{2}(2m+n-\delta_1)} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [(1-\delta_1)\cos(n-2m)f + \delta_1 \sin(n-2m)f]$$
$$= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-\delta_1)} 2^{\delta_2} (-1)^{\frac{1}{2}(2m+n-\delta_1)} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} [(1-\delta_1)\cos(n-2m)f + \delta_1 \sin(n-2m)f] \tag{1.125}$$

$$\cos^n f = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \cos(n-2m)f$$
$$= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(n-\delta_1)} 2^{\delta_2} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \cos(n-2m)f \tag{1.126}$$

其中

$$\delta_1 = \frac{1}{2}[1-(-1)^n], \quad \delta_2 = \begin{cases} 0, n-2m=0 \\ 1, n-2m \neq 0 \end{cases} \tag{1.127}$$

为了读者应用方便，在书后附录中将列出上述几类函数中一些常用平均值的具体结果。

1.5 广义力场中的二体问题

前面已提到，对于广义力场中的二体问题，相应的运动方程(1.1)将变为下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^N}\boldsymbol{r}, \quad N > 2 \tag{1.128}$$

这仍然是可积的，下面作简要阐述。

因为是有心力，故动量矩积分仍存在，且形式亦与前相同，即

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=h\hat{R},\quad h=\text{const} \tag{1.129}$$

因此，仍为一平面运动，$\hat{R}$ 是该运动平面的法向单位矢量。

在运动平面内引用极坐标(r,θ)，同样可给出降阶后的二阶方程：

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\mu}{r^N} \tag{1.130}$$

$$r^2\dot{\theta}=h \tag{1.131}$$

方程不显含 t，可直接讨论(r,θ)问题，并引进变换

$$u=\frac{1}{r} \tag{1.132}$$

由此可得到与前面(1.13)式类似的微分方程：

$$u''+u=\frac{\mu}{h^2}u^{N-2} \tag{1.133}$$

当 $N=2$ 时，即“退化”成(1.13)式。当 $N=3$ 时，也很简单，有

$$u''+\left(1-\frac{\mu}{h^2}\right)u=0 \tag{1.134}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned}&u=\frac{1}{r}=c_4\cos(\omega\theta+c_5)\\&\omega=\left(1-\frac{\mu}{h^2}\right)^{1/2}\quad\left(\frac{\mu}{h^2}<1\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.135}$$

$$\left.\begin{aligned}&u=\frac{1}{r}=c_4e^{\lambda_1\theta}+c_5e^{\lambda_2\theta}\\&\lambda_{1,2}=\pm\left(\frac{\mu}{h^2}-1\right)^{1/2}\quad\left(\frac{\mu}{h^2}>1\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.136}$$

$$u=\frac{1}{r}=c_5+c_4(t-t_0)\quad\left(\frac{\mu}{h^2}=1\right) \tag{1.137}$$

其中 c_4 和 c_5 为第四和第五个积分常数。

对于一般情况，由于方程(1.133)不含自变量 θ，于是引进变换 $u'=y,u''=y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$后，即得一可分离变量方程：

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{\mu}{h^2}u^{N-2}-u \tag{1.138}$$

积分后得

$$u'^2=y^2=\left(\frac{2\mu}{h^2}\frac{u^{N-1}}{N-1}-u^2\right)+c_4 \tag{1.139}$$

由此可给出相应的轨道方程：

$$\Phi(r,c_4)=\theta+c_5 \tag{1.140}$$

最后将 $r=r(\theta,c_4,c_5)$代入方程(1.131)，立即可写出该一阶方程的求积形式，问题即全部解决。尽管在一般情况下，轨道方程(1.140)比较复杂，相应的最后一个积分难以用简单函数形式表达，但问题的可积性已十分清楚。

在本书的第五章中讨论广义相对论效应时，考虑后牛顿改正的二体问题所对应的运动方程将比上述形式(1.128)更加复杂些，那里将会具体给出相应的六个积分。除这类可积情况外，

在限制性三体问题中，两个不动中心问题对应的也是可积系统，它在人造地球卫星动力学的中间轨道理论中将会得到应用[2]。下面仍旧回到牛顿引力场中的二体问题，介绍其结果的一些应用。

1.6 轨道根数与位置、速度向量之间的关系

1. 由轨道根数 $\sigma(t)$ 计算位置矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$

事实上，这是一个星历表计算问题。关于 $\sigma(t)$，如果其中时间根数采用真近点角 f 或偏近点角 E，那么问题就很简单，由公式(1.37)和(1.46)便可计算 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$。但是，常常被采用的却是平近点角 M，而不是 f 或 E，其原因将会从本书后面的一些章节中获知。因此，由 σ 计算 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$，就必须求解由(1.28)式表达的 Kepler 方程，给出所需要的偏近点角 E。

2. Kepler 方程的解法

根据(1.29)式定义的平近点角 M，Kepler 方程(1.28)式可写成

$$E-e\sin E=M \tag{1.141}$$

当 $e=0$ 时，对应圆轨道，有 $E=M$，这是一个简单关系式，而当 $e=1$ 时，则转化为 Barker 方程[7]。对于椭圆运动，则有 $0<e<1$，Kepler 方程实为一超越方程。

关于这一超越方程，其解法曾出现过成百种，当偏心率较小时，前面的级数展开式(1.84)即便于偏近点角 E 的计算。但是对于各种不同的偏心率和不同的精度要求，最好有一种较通用的简单算法。按此要求，对于 e 不接近 1 的轨道，普通迭代法和简单的牛顿法(或称微分改正法)便是较理想的近似解法。

(1)迭代法

由于 $e<1$，下述迭代法是收敛的，

$$E_{k+1}=M+e\sin E_k,\quad k=0,1,\cdots \tag{1.142}$$

(2)牛顿法

记

$$f(E)=(E-e\sin E)-M \tag{1.143}$$

根据

$$\left.\begin{aligned}&f(E_{k+1})=f(E_k)+f'(E_k)[E_{k+1}-E_k]+\cdots\\&f'(E_k)=1-e\cos E_k\end{aligned}\right\} \tag{1.144}$$

有

$$E_{k+1}=E_k-\frac{f(E_k)}{f'(E_k)},\quad k=0,1\cdots \tag{1.145}$$

关于上述两种方法中初值 E_0 的选取，本章参考文献[7]中有详尽的讨论，但在一般情况下，可作简单的选取，即取

$$E_0 = M$$

对于 e 接近 1 的情况以及其它一些有效方法，读者可参阅有关文献。但必须注意，任何包含迭代过程的近似解法，对收敛的控制标准 ε，即 $\Delta E_k = E_{k+1} - E_k \leqslant \varepsilon$ 中的 ε 值，既要考虑问题的精度要求，又要考虑所用计算机的实际有效字长，否则将会造成"死循环"。另外，对于 e 较大的问题，为了节省计算机时，最好能避开选取平近点角 M 作为第六个根数，这在采用数值方法求解以轨道根数作为基本变量的天体运动方程时是可以实现的，后面第八章中将会介绍这一内容。

3. **由 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ 计算轨道根数 $\sigma(t)$**

(1)根数 a, e, M 的计算

a, e, M 这三个根数可以确定椭圆轨道的大小、形状和天体在轨道面内相对近星点的位置，都是轨道平面内的量。根据活力公式(1.21)，r 的表达式(1.27)，$\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的数量乘积以及 Kepler 方程(1.141)，可给出分别计算 a, e, M 的表达式，即

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \tag{1.146}$$

$$\left.\begin{aligned} e\cos E &= 1 - \frac{r}{a} \\ e\sin E &= r\dot{r} / \sqrt{\mu a} \end{aligned}\right\} \tag{1.147}$$

$$M = E - e\sin E \tag{1.148}$$

这里用到 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式(1.37)和(1.46)式。上述各式中的 r, v^2 和 $r\dot{r}$ 由下式计算

$$\left.\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ r\dot{r} &= \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \end{aligned}\right\} \tag{1.149}$$

(2)三个定向根数 i, Ω, ω 的计算

从 1.1 和 1.2 中的有关内容，我们了解到这三个根数确定了 $\hat{P}$、$\hat{Q}$、$\hat{R}$ 三个单位矢量，而这三个单位矢量又是由 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 所确定的。由(1.37)式和(1.46)式容易解出

$$\hat{P} = \frac{\cos E}{r}\boldsymbol{r} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\sin E\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.150}$$

$$\sqrt{1-e^2}\hat{Q} = \frac{\sin E}{r}\boldsymbol{r} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{u}}(\cos E - e)\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.151}$$

而动量矩积分则给出

$$\hat{R} = (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) / \sqrt{\mu a(1-e^2)} \tag{1.152}$$

我们只需要 P_z, Q_z 和 R_x, R_y, R_z 即可计算 i, Ω, ω。由 $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$ 的表达式(1.43)、(1.44)和(1.4)给出

$$\left.\begin{aligned} &P_z = \sin i\sin\omega, \quad Q_z = \sin i\cos\omega \\ &\begin{pmatrix} R_x \\ -R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin i\sin\Omega \\ \sin i\cos\Omega \\ \cos i \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{1.153}$$

那么

$$\omega=\mathrm{tg}^{-1}(P_z/Q_z) \tag{1.154}$$

$$\Omega=\mathrm{tg}^{-1}[R_x/(-R_y)] \tag{1.155}$$

$$i=\cos^{-1}R_z \tag{1.156}$$

计算 ω,Ω 与前面计算 E 一样，均有确定象限问题，故必须用两个三角函数值，而对 i 只需用一个 $\cos i$ 值就够了，关于这一点，读者是容易理解的。

4. 由 $\boldsymbol{r}(t_1)$ 和 $\boldsymbol{r}(t_2)$ 计算 $\sigma(t_0)$

这里 t_0 可以是 t_1 或 t_2，亦可取其它值，例如中间值 $t_0=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$。由 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t_1)$ 和 $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(t_2)$ 计算 $\sigma_0=\sigma(t_0)$ 的方法很多，下面三种方法是比较典型的。

(1)首先由 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 计算 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$，从而按照上一节的方法计算 σ_0。根据关系式(1.49)，有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1=F_1\boldsymbol{r}_0+G_1\dot{\boldsymbol{r}}_0\\ \boldsymbol{r}_2=F_2\boldsymbol{r}_0+G_2\dot{\boldsymbol{r}}_0\end{aligned}\right\} \tag{1.157}$$

其中 F_1,G_1 和 F_2,G_2 即由公式(1.50)或(1.55)表达。相应的 Δt 分别为 Δt_1 和 Δt_2，即

$$\Delta t_1=t_1-t_0,\quad \Delta t_2=t_2-t_0 \tag{1.158}$$

由(1.157)式可解出

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_0=\frac{G_2\boldsymbol{r}_1-G_1\boldsymbol{r}_2}{F_1G_2-F_2G_1}\\ \dot{\boldsymbol{r}}_0=\frac{F_2\boldsymbol{r}_1-F_1\boldsymbol{r}_2}{F_2G_1-F_1G_2}\end{aligned}\right\} \tag{1.159}$$

求解 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 实为一迭代过程，$F_j,G_j(j=1,2)$ 的初值可取

$$\left.\begin{aligned}F=1-(\frac{1}{2}u_0)\Delta t^2\\ G=\Delta t-(\frac{1}{6}u_0)\Delta t^3\end{aligned}\right\} \tag{1.160}$$

其中

$$u_0=1/r_0^3,\quad r_0=\frac{1}{2}(r_1+r_2) \tag{1.161}$$

具体计算 F,G 时，可采用展开式(1.55)或封闭形式(1.50)～(1.53)。

(2)高斯(Gauss)型方法，这是在高斯初轨计算方法[18]中采用的，它是众多计算方法中的一种较典型的方法。因此，尽管这一方法比较陈旧，而当今的计算条件亦已发生了显著的变化，它已很少被采用，但就其原理而言，却是一种典型。为此，我们结合其计算构想，具体介绍下面的第三种方法。

(3)高斯型计算方法的改进。唯一与时间 t 有关的积分 Kepler 方程是反映二体问题动力学特征的一个重要关系式，它确定了由时刻 t_1 到 t_2 天体运动所遵循的规律，即

$$n\tau=(E_2-E_1)-e(\sin E_2-\sin E_1) \tag{1.162}$$

其中 $\tau=t_2-t_1$。不过，这一关系式在某些问题中不便于直接引用。为此，人们在此基础上导出了一个相应的关系式，即朗伯(Lambert)方程[3]：

$$n\tau=(\varepsilon-\delta)-(\sin\varepsilon-\sin\delta) \tag{1.163}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon-\delta=E_2-E_1\\&\sin\varepsilon-\sin\delta=e(\sin E_2-\sin E_1)\end{aligned}\right\} \tag{1.164}$$

ε,δ 满足下列关系式：

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\pm\left(\frac{r_1+r_2+\sigma}{4a}\right)^{1/2} \tag{1.165}$$

$$\sin\frac{\delta}{2}=\pm\left(\frac{r_1+r_2-\sigma}{4a}\right)^{1/2} \tag{1.166}$$

$$\sigma=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2} \tag{1.167}$$

关于朗伯方程的推导，请见本章参考文献[2]和[3]的有关章节。其中有关 $\sin\varepsilon/2$ 和 $\sin\delta/2$ 右端正负号的选择，在一般情况下是比较麻烦的，但在二体问题意义下，所涉及到的 $\tau-t_2-t_1$ 显然不会过长，通常是较短的，例如半圈之内，甚至更短。在此情况下，(1.165)和(1.166)式右端以及 $\cos\varepsilon/2.\cos\delta/2$ 都取正号，那么有

$$0<\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\delta}{2}\right)<\pi/2$$

本章参考文献[2]第三章有关部分对此作了详尽的讨论。

已知 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，首先可根据(1.163)～(1.167)式，用微分改正法求解轨道半长径 a。即

$$F(a)-n\tau-[(\varepsilon-\delta)-(\sin\varepsilon-\sin\delta)] \tag{1.168}$$

$$a^{(k+1)}=a^{(k)}+\frac{F(a^{(k)})}{[-F'(a^{(k)})]},\quad k=0,1,\cdots \tag{1.169}$$

其中

$$-F'(a)=\frac{1}{a}\left[\frac{3}{2}n\tau-\frac{1}{2a}(r_1+r_2+\sigma)\mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2a}(r_1+r_2-\sigma)\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}\right] \tag{1.170}$$

关于初值 $a^{(0)}$ 的选择可视问题的具体情况。根据精度要求控制迭代过程，收敛后的 $a^{(k+1)}$ 即作为 a_0，同时给出角 ε 和 δ。

第二步计算 e_0 和 M_0，由

$$\left.\begin{aligned}&e_0\cos E_1-1-\frac{r_1}{a_0}\\&e_0\sin E_1=\frac{e_0\cos E_1\cos(\varepsilon-\delta)-e_0\cos E_2}{\sin(\varepsilon-\delta)}\end{aligned}\right\} \tag{1.171}$$

可计算 e_0 和 E_1，其中

$$e_0\cos E_2=1-\frac{r_2}{a_0} \tag{1.172}$$

而 $e_0\sin E_1$ 是由下式给出的

$$\begin{aligned}e_0\cos E_2&=e_0\cos[E_1+(E_2-E_1)]\\&=e_0\cos E_1\cos(E_2-E_1)-e_0\sin E_1\sin(E_2-E_1)\end{aligned}$$

这里的 (E_2-E_1) 即前面给出的 $(\varepsilon-\delta)$。求出 E_1 后即可由

$$\left.\begin{aligned}&M_0=(E_1-e\sin E_1)+n(t_0-t_1)\\&n=\sqrt{\mu}\,a_0^{-3/2}\end{aligned}\right\} \tag{1.173}$$

给出 M_0，同时可由

$$E_2 = E_1 + (\varepsilon - \delta)$$

给出 E_2。

最后计算三个定向根数 i_0,Ω_0,ω_0，这与前面由 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$ 计算 i,Ω,ω 的方法类似。首先根据 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 计算 $\hat{P},\hat{Q}$ 和 $\hat{R}$。由

$$\boldsymbol{r}_1 = a_0(\cos E_1 - e_0)\hat{P} + a_0\sqrt{1-e_0^2}\sin E_1\hat{Q}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = a_0(\cos E_2 - e_0)\hat{P} + a_0\sqrt{1-e_0^2}\sin E_2\hat{Q}$$

可解出

$$\left.\begin{aligned} &\hat{P} = (\sin E_2\boldsymbol{r}_1 - \sin E_1\boldsymbol{r}_2)/A \\ &\sqrt{1-e_0^2}\hat{Q} = -[(\cos E_2 - e_0)\boldsymbol{r}_1 - (\cos E_1 - e_0)\boldsymbol{r}_2]/A \\ &A = a_0[\sin(\varepsilon-\delta) - (\sin\varepsilon - \sin\delta)] \end{aligned}\right\} \tag{1.174}$$

另外

$$\hat{R} = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)/|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2| \tag{1.175}$$

根据 P_z,Q_z 和 R_x,R_y,R_z 即可算出 i_0,Ω_0 和 ω_0，方法同前，见(1.154)～(1.156)式。

1.7　初轨计算原理和两类基本定轨方法

这里所说的初轨计算，是指在二体问题意义下的定轨问题，即假定天体沿着一不变轨道运动。尽管随着天体力学的发展，曾出现过多种定轨方法，但在二体问题意义下，就精度而言，它们几乎都是“等价”的，并没有什么优劣之分。对于光学观测资料，从原理上看，基本上分两大类，一类是通过三次观测首先确定历元时刻的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$，继而给出相应的轨道根数 σ；另一类是通过确定三次观测的位置矢量 $\boldsymbol{r}_j(j=1,2,3)$ 来确定某一历元的轨道根数 σ。前一类的代表是拉普拉斯方法，后一类则是高斯方法。即使用多点(即多次观测)进行定轨，只要仍在二体问题意义下，相应的定轨方法也不会发生根本性的改变，只是定轨精度会有所提高，这种提高主要取决于多资料的统计特征。

事实上，由于近代观测技术的发展和计算条件的改善，定轨方法也随之有很大改进，而且出现了一些新方法。但是，本书仍针对光学观测资料，着重介绍上述两种典型方法是完全有必要的，它可使读者掌握定轨的基本原理和由观测确定轨道的关键所在。

从微分方程初值问题的角度来看，初轨计算就是根据观测来确定二体问题的六个积分常数，可以是 $t_0,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0$，也可以是六个椭圆轨道根数 $a_0,e_0,i_0,\Omega_0,\omega_0,M_0$(或 τ，即过近星点的时刻)。如果能由观测直接给出 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$，那么就不存在什么初轨计算问题。然而，对于光学观测而言，通常是无法直接得到 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 或是两个时刻(t_1 和 t_2)的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，对于光学观测，只能给出天体的方位，如地平坐标系中的 A,h，赤道坐标系中的 α,δ。因此，初轨计算问题实际上是归结为由观测值(A,h)或(α,δ)计算某一历元 t_0 的 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$，或是两个时刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$，这正是前面所说的，众多的初轨计算方法可归结为两类的原因所在。

1. 拉普拉斯方法

1796 年，拉普拉斯提出了这一方法，后经多次改进，这里要介绍的就是以当今计算条件为背景的改进后的拉普拉斯方法。

不妨以光学观测中的赤道坐标资料为例，三次观测即可唯一地确定轨道。三次观测是

$$t_j, \alpha_j, \delta_j \quad (j=1,2,3)$$

见图 1.4，图中 O 是中心天体的质心，也是坐标原点，O' 是站心（严格地说应该是测量仪器的"中心"，或是"采样"处，下面不再说明），S 是运动天体。对于大行星和小行星的运动，涉及到日心坐标系，O 是太阳质心，O' 是地球上的观测站。对于人造地球卫星的运动，涉及到地心坐标系，O 则是地心，O' 是地面测站。相应的测量几何关系式为

$$\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{\rho}_j + \boldsymbol{R}_j \quad (j=1,2,3) \tag{1.176}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}$ 是观测矢量，$\boldsymbol{R}$ 是测站矢量，有

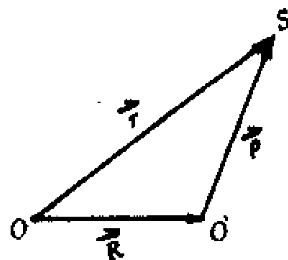


图 1.4 观测几何

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \hat{L} \tag{1.177}$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1.178}$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{1.179}$$

如果将椭圆运动关系（即位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与轨道根数之间的关系）引入，则方程组(1.176)将共有 9 个方程，包含 9 个未知量：6 个轨道根数和 3 个距离 ρ，原则上是可解的，但这是一超越方程组，直接求解不可能。实际做法是首先利用(1.176)式的 z 分量消除定轨中不必求出的运动天体到测站的距离 ρ，由此可得

$$\nu_j x_j = \lambda_j (z_j - Z_j) + \nu_j X_j$$
$$\nu_j x_j = \mu_j (z_j - Z_j) + \nu_j Y_j$$

记

$$\left.\begin{aligned} P_j &= \nu_j X_j - \lambda_j Z_j \\ Q_j &= \nu_j Y_j - \mu_j Z_j \end{aligned}\right\} \tag{1.180}$$

则几何关系(1.176)式变为

$$\left.\begin{aligned} &\nu_j x_j - \lambda_j z_j = P_j \\ &\nu_j x_j - \mu_j z_j - Q_j \quad (j=1,2,3) \end{aligned}\right\} \tag{1.181}$$

显然，上述三次光学观测所满足的几何关系仅有六个独立方程，当然无法确定 9 个未知量 $\boldsymbol{r}_j(x_j, y_j, z_j)$。但运动不是任意的，而应满足椭圆运动性质（即动力学条件）。根据二体问题的性质，三次观测对应的位置矢量 $\boldsymbol{r}_j$ 可由某一历元 t_0（可以是 t_j 中的任一个，或是它们的中间值）对应的 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 完全确定，即满足(1.49)式：

$$\boldsymbol{r}_j = F_j \boldsymbol{r}_0 + G_j \dot{\boldsymbol{r}}_0 \quad (j=1,2,3) \tag{1.182}$$

其中 F_j 和 G_j 涉及到的 Δt_j 应为

$$\Delta t_j = t_j - t_0 \quad (j=1,2,3) \tag{1.183}$$

将(1.182)式代入方程(1.181)，经整理后给出

$$\left.\begin{aligned}(\nu_j F_j)x_0-(\lambda_j F_j)z_0+(\nu_j G_j)\dot{x}_0-(\lambda_j G_j)\dot{z}_0=P_j\\(\nu_j F_j)y_0-(\mu_j F_j)z_0+(\nu_j G_j)\dot{y}_0-(\mu_j G_j)\dot{z}_0=Q_j\end{aligned}\right\} \tag{1.184}$$

这就是目前常用的改进的拉普拉斯方法的基本方程组，一共是 6 个方程，6 个未知量 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$。但它只是一形式上的线性代数方程组，其系数 F_j 和 G_j 亦包含 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$，相应的封闭表达式即(1.50)～(1.53)式，展开形式即(1.55)式。

尽管 F_j,G_j 也是 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的函数，但由于二体问题意义下的定轨问题涉及到的弧段不应太长，一般 Δt_j 较小，因此完全可将方程组(1.184)当作线性代数方程组采用迭代方式来求解 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$，迭代初值可取

$$\left.\begin{aligned}F_j^{(0)}&=1-\frac{1}{2r_0^3}\Delta t_j^2\\G_j^{(0)}&=\Delta t_j-\frac{1}{6r_0^3}\Delta t_j^3\end{aligned}\right\} \tag{1.185}$$

其中 r_0 可取近似值，如取近似的 a 值。若对该天体的轨道一无所知，初值(1.185)可更简单些，即

$$\left.\begin{aligned}F_j^{(0)}&=1\\G_j^{(0)}&=\Delta t_j\end{aligned}\right\} \tag{1.186}$$

如果三次观测弧段较小，可采用 F_j,G_j 的展开形式(1.55)进行迭代，即由初值 $F_j^{(0)},G_j^{(0)}$ 代入方程组(1.184)解出 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$，再由(1.55)式重新计算 F_j,G_j。关于展开式(1.55)的取项问题，可视精度要求而确定。若弧段不太短，而精度要求又较高，则可采用 F，G 的封闭表达式(1.50)～(1.53)，但在这一迭代过程中可同时给出轨道半长径 a，计算过程不算复杂，尤其在当今计算条件下，这一迭代过程是相当简单的。不过要注意，在初值不准的情况下，一般不宜在迭代开始时就采用 F,G 的封闭表达式，否则在迭代过程中会因出现 $\frac{1}{a}=\frac{2}{r_0}-v_0^2<0$ 等问题而使计算中断。

上述迭代由下式控制：

$$\max(\Delta F_j,\Delta G_j)<\varepsilon \quad (j=1,2,3) \tag{1.187}$$

其中

$$\Delta F_j=|F_j^{(k)}-F_j^{(k-1)}|,\quad \Delta G_j=|G_j^{(k)}-G_j^{(k-1)}| \tag{1.188}$$

k 是迭代次数，ε 就是定轨要求的精度。迭代收敛后，即可由最后得到的 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 按 1.6 中的方法计算出相应的 6 个轨道根数 $a_0,e_0,i_0,\Omega_0,\omega_0,M_0$。

在二体问题意义下，拉普拉斯方法的定轨原理是严格的，所定出的轨道显然要通过三次观测对应的空间点。正是由于这一原因，加上弧段又较短，这就使得资料误差会明显地歪曲真实轨道，即定轨精度受到严重影响，尤其是轨道半长径 a 和偏心率 e。例如人造地球卫星椭圆轨道，应有 $a>a_e$，a_e 是地球赤道半径，但有时因弧段短、资料精度又差，计算出的轨道会呈现 $a<a_e$ 的现象。从前面的迭代计算中也可看出这一问题，由于 F_j,G_j 的特点，通过方程(1.184)求解时，资料误差(反映在 λ_j,μ_j,ν_j 上)对 $\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0$ 的影响比对 x_0,y_0,z_0 的影响大，从而导致 a 和 e

有较大的误差。但是，这一问题并不是拉普拉斯方法特有的，而是根据二体问题原理通过三次光学观测（相应的弧段较短）严格定轨的一类方法所共有的问题，只是表现形式不同而已。如上述人造地球卫星的例子，改用高斯方法或其它类似方法，也同样会定出 $a<a_e$ 的结果，这已被大量计算实例所证实。

考虑到现代观测技术的发展，无论对自然天体或是人造天体，特别是后者，即使在短弧段内，亦可得到较多的观测资料。那么仍可在二体问题意义下，采用多点定轨，此时只是基本方程组(1.184)的个数增加，$j=1,2,\cdots,N$，$N\geqslant 3$，这可用简单的最小二乘法给出 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 的最佳解。这样可以充分利用多资料的统计特性，定出的轨道并不需要通过某些观测点，因而不会因一、二次观测的不准而导致较大的定轨误差。采用多点进行初轨计算时，前面所提出的控制标准(1.187)式将改为

$$(\overline{\Delta F},\overline{\Delta G})<\varepsilon \tag{1.189}$$

这里 $\overline{\Delta F}$ 和 $\overline{\Delta G}$ 分别为 ΔF_j 和 $\Delta G_j(j=1,2,\cdots,N)$ 的平均值，而且求解过程中还可以设法剔除个别 ΔF 和 ΔG 特别大的“错误”资料（或称野值），这样效果更好。

2. 高斯方法

高斯于 1802 年提出了这一方法，计算过程非常复杂，后经多次改进，使方法得以简化，下面介绍改进的高斯方法。仍以三次光学观测的赤道坐标资料为例，即

$$t_j,\alpha_j,\delta_j\quad (j=1,2,3)$$

相应的测量几何关系式仍为(1.176)式，即

$$\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{\rho}_j+\boldsymbol{R}_j=\rho_j\hat{\boldsymbol{L}}_j+\boldsymbol{R}_j$$

同样消去 ρ_j 得

$$\left.\begin{aligned}\nu_j x_j&=\lambda_j z_j+(\nu_j X_j-\lambda_j Z_j)\\ \nu_j y_j&=\mu_j z_j+(\nu_j Y_j-\mu_j Z_j)\end{aligned}\right\}$$

记

$$\left.\begin{aligned}U_j&=\lambda_j/\nu_j,\quad V_j=\mu_j/\nu_j\\ P_j&=X_j-U_jZ_j,\quad Q_j=Y_j-V_jZ_j\end{aligned}\right\} \tag{1.190}$$

上式变为

$$\left.\begin{aligned}x_j&=U_jz_j+P_j\\ y_j&=V_jz_j+Q_j\end{aligned}\right\} \tag{1.191}$$

高斯方法就是通过三次观测给出 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_3$，从而按上一节的方法计算出 6 个轨道根数。由于二体问题对应的是平面运动，三个时刻的位置矢量是线性相关的，即存在三个不全为零的常数 d_1,d_2,d_3，使得

$$d_1\boldsymbol{r}_1+d_2\boldsymbol{r}_2+d_3\boldsymbol{r}_3=0 \tag{1.192}$$

不妨假定 $d_2\neq 0$，上式可写为

$$\boldsymbol{r}_2=c_1\boldsymbol{r}_1+c_3\boldsymbol{r}_3 \tag{1.193}$$

c_1 和 c_3 为常数。(1.191)式对 $j=2$ 有

$$\left.\begin{aligned}x_2&=U_2z_2+P_2\\ y_2&=V_2z_2+Q_2\end{aligned}\right\}$$

利用(1.193)式，上式变为

$$\left.\begin{aligned}c_1x_1+c_3x_3&=U_2(c_1z_1+c_3z_3)+P_2\\c_1y_1+c_3y_3&=V_2(c_1z_1+c_3z_3)+Q_2\end{aligned}\right\}$$

再利用(1.191)式消去上式中的 x_1,y_1 和 x_3,y_3 得

$$\left.\begin{aligned}c_1(U_1z_1+P_1)+c_3(U_3z_3+P_3)&=c_1(U_2z_1)+c_3(U_2z_3)+P_2\\c_1(V_1z_1+Q_1)+c_3(V_3z_3+Q_3)&=c_1(V_2z_1)+c_3(V_2z_3)+Q_2\end{aligned}\right\}$$

整理后即可给出高斯方法的基本方程：

$$\left.\begin{aligned}c_1(U_1-U_2)z_1+c_3(U_3-U_2)z_3&=P_2-(c_1P_1+c_3P_3)\\c_1(V_1-V_2)z_1+c_3(V_3-V_2)z_3&=Q_2-(c_1Q_1+c_3Q_3)\end{aligned}\right\}\tag{1.194}$$

只要 c_1 和 c_3 已知，即可解出 z_1,z_3，再由(1.191)式可给出 x_1,y_1 和 x_3,y_3，由此便得 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_3$。

至此只用到几何条件，而通过动力学条件可以确定(1.193)式中的常数 c_1 和 c_3。较早的高斯方法涉及到计算扇形面积和三角形面积比，过程相当复杂，这里介绍改进后的形式。由(1.49)式得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1&=F_1\boldsymbol{r}_2+G_1\dot{\boldsymbol{r}}_2\\\boldsymbol{r}_3&=F_3\boldsymbol{r}_2+G_3\dot{\boldsymbol{r}}_2\end{aligned}\right\}\tag{1.195}$$

其中 F_j,G_j 涉及到的 Δt_j 为

$$\Delta t_1=t_1-t_2,\quad \Delta t_3=t_3-t_2\tag{1.196}$$

将(1.195)式代入(1.193)式得

$$\boldsymbol{r}_2=c_1(F_1\boldsymbol{r}_2+G_1\dot{\boldsymbol{r}}_2)+c_3(F_3\boldsymbol{r}_2+G_3\dot{\boldsymbol{r}}_2)$$

该式两端分别与 $\boldsymbol{r}_2$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 进行矢量乘积，得

$$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_2=(c_1G_1+c_3G_3)\boldsymbol{r}_2\times\dot{\boldsymbol{r}}_2=0$$

$$\boldsymbol{r}_2\times\dot{\boldsymbol{r}}_2=(c_1F_1+c_3F_3)\boldsymbol{r}_2\times\dot{\boldsymbol{r}}_2$$

显然，$\boldsymbol{r}_2\times\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 是非零矢量，故有

$$c_1G_1+c_3G_3=0$$

$$c_1F_1+c_3F_3=1$$

由此解出

$$\left.\begin{aligned}c_1&=\frac{G_3}{F_1G_3-F_3G_1}\\c_3&=-\frac{G_1}{F_1G_3-F_3G_1}\end{aligned}\right\}\tag{1.197}$$

于是将 c_1 和 c_3 的计算转化为 F_1,G_1 和 F_3,G_3 的计算，而它们又是 $\boldsymbol{r}_2,\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 和 Δt_j 的函数。因此，具体求解仍是一迭代过程，与拉普拉斯方法有些类似之处。

首先按(1.185)式或(1.186)式给定初值 $F_1^{(0)},G_1^{(0)},F_3^{(0)},G_3^{(0)}$，由(1.197)式计算 c_1 和 c_3，进而由基本方程组(1.194)解出 z_1 和 z_3，再由(1.191)式给出 x_1,y_1 和 x_3,y_3，即得 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_3$。下一步计算需要知道 $\boldsymbol{r}_2$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_2$，$\boldsymbol{r}_2$ 可由(1.193)式给出，而 $\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 则可用数值微分由 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 给出，由此重新计算 $F_j,G_j(j=1,3)$，如此迭代下去，直到两次 F_j,G_j 的差别达到精度要求为止。

这里必须说明的是，迭代过程中 $\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 的计算若采用前面的(1.159)式，即

$$\dot{\boldsymbol{r}}_2=\frac{F_3\boldsymbol{r}_1-F_1\boldsymbol{r}_3}{F_3G_1-F_1G_3}$$

而重新计算 F_i, G_i 又按拉普拉斯方法进行，那么这种迭代过程实际上就是在计算出 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 的同时计算出 $\boldsymbol{r}_2$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_2$，这与拉普拉斯方法已无实质差别。至于是否改用 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 计算轨道根数要比由 $\boldsymbol{r}_2$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_2$ 计算轨道根数好？回答是否定的。对于二体问题定轨，在一定精度意义下，三点定轨是"唯一"的，上述几种方法不可能得出不同的轨道，这从几种方法的原理和具体计算过程可以看出，而且已由大量的计算结果所证实。

从上面介绍的方法不难看出，在二体问题意义下的定轨，还是改进后的拉普拉斯方法简单实用。但正如前面所分析的那样，所有采用二次观测的短弧定轨方法都有一个无法克服的困难，即轨道半长径 a 难以定准。如果有连续两圈以上的观测资料(对于人造地球卫星是容易实现的)，可以用来定出天体运动的周期，从而计算出轨道半长径 a，在 a 已知情况下确定两次观测的位置矢量，由此计算出轨道根数，效果会明显变好，请见本章参考文献[2]第三章。

根据上述两种典型方法和具体过程，已能了解到二体问题意义下三点定轨或多点定轨的关键所在，它不外乎几何条件(包括平面运动特征)和椭圆运动力学条件的应用，而力学条件基本上体现在开普勒方程、朗伯方程和位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 对某一时刻 $\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0$ 展开式的引用上。

3. 两点说明

(1)其它类型观测资料的定轨问题及各种改进方法。对于人造天体，由于距离测站较近，可用现代观测技术进行测距 ρ 和测速 $\dot{\rho}$ 观测，还可以进行多种设备的组合测量，甚至可以通过观测直接给出位置矢量 $\boldsymbol{r}$，这将大大简化定轨计算。关于这些定轨问题，在本章参考文献[2]的第三章中有较仔细的讨论，这里不再阐述。除此之外，还有一些改进方法，但就其原理而言，与本节介绍的两类典型方法没有实质性差别，请见本章参考文献[8]～[10]。

(2)对于人造地球卫星而言，常常可以得到连续几圈甚至几天的较长弧段的资料，因此，根据多点并同时考虑一些主要摄动源来进行定轨，也是当今定初轨的一个重要方法，不过这里的"初轨"之意已不是前面所说的二体问题意义下的定轨，而是一种简单的轨道改进，给出受摄二体问题的"初轨"。关于轨道改进问题，请见本书最后一章。

1.8 抛物线轨道和双曲线轨道

尽管从天体力学方法这一角度来看，显然应该着重讨论椭圆轨道及其变化，但在有些问题中亦涉及到抛物线轨道和双曲线轨道，特别是后者。因此，作为二体问题，对这两种轨道作一简单介绍也是有必要的。

1. 抛物线轨道

此时，$e=1, a\to\infty$，故面积积分(1.19)式和轨道积分(1.17)式变为

$$r^2\dot{\theta}=\sqrt{\mu p},\quad p=2q \tag{1.198}$$

$$r=\frac{p}{1+\cos(\theta-\omega)} \tag{1.199}$$

该抛物线的焦点仍在中心天体上，p 是半通径，q 是近星距。仍定义 f 为真近点角，有

$$f=\theta-\omega \tag{1.200}$$

那么(1.198)和(1.199)式即可分别写成下列形式：

$$r^2\dot{f}=\sqrt{2\mu q} \tag{1.201}$$

$$r=\frac{p}{1+\cos f}=q\sec^2\frac{f}{2} \tag{1.202}$$

将后一式代入前一式，积分得

$$2\text{tg}\frac{f}{2}+\frac{2}{3}\text{tg}^3\frac{f}{2}=\sqrt{2\mu}q^{-3/2}(t-\tau) \tag{1.203}$$

其中 τ 是最后一个积分常数，与椭圆运动类似，它也是运动天体 m 过近星(M)点的时刻。因此，抛物线轨道根数由于 $e=1$ 只剩下 5 个，即 i,Ω,q,ω,τ。

2. 双曲线轨道

此时 $e>1$，相应的面积积分(1.19)式和轨道方程(1.17)式变为

$$r^2\dot{\theta}=\sqrt{\mu p} \tag{1.204}$$

$$r=\frac{p}{1+e\cos f} \tag{1.205}$$

其中

$$p=a(e^2-1) \tag{1.206}$$

$$f=\theta-\omega \tag{1.207}$$

这里的 p 亦为半通径，p 和 a 的几何意义见图 1.5，f 是真近点角，ω 是近星点角距，而相应的近星距为

$$r_p=a(e-1) \tag{1.208}$$

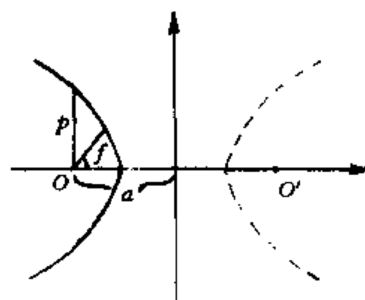


图 1.5 天体 m 相对天体 M (即焦点 O)的双曲线轨道

活力公式(1.21)在这里变为下列形式：

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \tag{1.209}$$

类似于对椭圆运动的积分方法，由(1.209)式利用(1.204)式消除 $\dot{\theta}$ 得

$$na\,dt=\frac{r\,dr}{\sqrt{(r+a)a^2-a^2e^2}} \tag{1.210}$$

其中

$$n=\sqrt{\mu}a^{-3/2} \tag{1.211}$$

引进辅助量 E

$$r=a(e\,\text{ch}E-1) \tag{1.212}$$

代入(1.210)式，积分得

$$e\,\text{sh}E-E=n(t-\tau)=M \tag{1.213}$$

其中 τ 为第六个积分常数，亦是过近星点的时刻。虽然这里引进的 E 与椭圆运动中的偏近点角 E 意义不同，但上述 f,E 和 M 之间的关系与椭圆运动中的相应关系类似，即

$$\left.\begin{aligned} r\cos f &= a(e-\mathrm{ch}E) \\ r\sin f &= a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}E \end{aligned}\right\} \tag{1.214}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{E}{2} \tag{1.215}$$

由轨道方程(1.205)不难看出，$1+e\cos f=0$，$r\to\infty$，于是可知：

$$-\pi+\cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)\leqslant f\leqslant\pi-\cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \tag{1.216}$$

方程(1.213)类似于椭圆运动中的 Kepler 方程，但由于 $e>1$，不能用一般的迭代法求解，若用微分改正法(即简单的牛顿法)，亦容易由给定的 e，M 求出 E。若取初值 $E=E^{(0)}$，则改正公式为

$$\left.\begin{aligned} \Delta E &= \frac{M-(e\,\mathrm{sh}E^{(0)}-E^{(0)})}{e\,\mathrm{ch}E^{(0)}-1} \\ E^{(1)} &= E^{(0)}+\Delta E \end{aligned}\right\} \tag{1.217}$$

例：由 $e=1.5$，$M=\pi/4=0.785398163$，求 E 值。

经计算，取 $E^{(0)}=M$，相应的改正过程如下：

$$E^{(1)}=1.056\ 738\ 913$$

$$E^{(2)}=1.018\ 032\ 116$$

$$E^{(3)}=1.016\ 994\ 172$$

$$E^{(4)}=1.016\ 993\ 449$$

$E^{(4)}$对应的 $e\,\mathrm{sh}E-E=0.785\ 398\ 163$，与 M 的值在 9 位有效数字上完全相同。当然，还可充分利用当代计算机的条件，采用更快速的“迭代”算法，这里只是举一个简单的算例供读者参考。

3. 位置矢量和速度矢量的计算公式

对于上述两种轨道，运动天体的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的表达式与椭圆轨道相同，即

$$\boldsymbol{r}=r\cos f\hat{P}+r\sin f\hat{Q} \tag{1.218}$$

其中 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 即近星点方向和半通径方向的单位矢量，它们的表达式与椭圆运动中的形式相同，见(1.43)和(1.44)两式。

速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式，两种轨道稍有不同，对于抛物线轨道和双曲线轨道分别为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}[(-\sin f)\hat{P}+(\cos f+1)\hat{Q}] \\ p &= 2q \end{aligned}\right\} \tag{1.219}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}[(-\sin f)\hat{P}+(\cos f+e)\hat{Q}] \\ p &= a(e^2-1) \end{aligned}\right\} \tag{1.220}$$

参 考 文 献

[1]易照华,《天体力学基础》,南京大学出版社,1994。

[2]刘　林,《人造地球卫星轨道力学》,高等教育出版社,1992。

[3]Plummer, H. C., *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*, Cambridge at the University Press, 1918.

[4]Smart, W. M., *Celestial Mechanics*, University of Glasgow, 1953.

[5]Brouwer, D. and Clemence, G. M., *Methods of celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1961

刘林、丁华译,《天体力学方法》,科学出版社,1986。

[6]Giacaglia, G. E. O., *Celest. Mech.*, 14(1976), 515~523.

[7]Taff, L. G. and Brennan, T. A., *Celest. Mech.*, 46(1989), 163~176.

[8]Taff, L. G., *Celestial Mechanics*, John Wiley & Sons, 1985.

[9]Taff, L. G., *Astron. J.*, 89(1984), 1426~1428.

[10]Morton, B. G. and Taff, L. G., *Celest. Mech.*, 39(1986), 181~190.

第二章　受摄二体问题的基本方程与小参数幂级数解

绪论中已给出受摄二体问题运动方程的一般形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0(r)+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon) \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{F}_0(r)=-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{2.2}$$

其中 $\mu=G(M+m)$，M 和 m 各为中心天体和运动天体的质量。$\boldsymbol{F}_1$ 是摄动加速度，其形式由具体的摄动源所确定。上述方程是单个运动天体的情况，若所讨论的系统涉及多个运动天体，例如太阳系，讨论九大行星（相应的质量分别记为 m_i，$i=1,2,\cdots,9$）的运动时，这一 10 体系统可归结为 9 个受摄二体问题，中心天体为太阳，相应的质量记为 M，此时运动方程可写为下列形式：

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_{0i}+\boldsymbol{F}_{1i}\quad(i=1,2\cdots,9) \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{F}_{0i}=-\mu_i\frac{\boldsymbol{r}_i}{r_i^3} \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{F}_{1i}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{9}Gm_j\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3}+\frac{\boldsymbol{r}_j}{r_j^3}\right) \tag{2.5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\mu_i=G(M+m_i)\\&\boldsymbol{\Delta}_{ij}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j\quad(j\neq i)\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

尽管如此，我们仍可以单个天体的运动方程(2.1)作为背景来讨论相应的摄动运动方程的建立，这是不难理解的。

2.1　摄动运动方程的建立——常数变易法

首先考虑无摄运动（即二体问题），此时 $\boldsymbol{F}_1=0$，相应的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{2.7}$$

第一章已给出该问题的解，其形式可归结为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(c_1,c_2,\cdots,c_6,t) \tag{2.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{g}(c_1,c_2,\cdots,c_6,t) \tag{2.9}$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} \tag{2.10}$$

六个积分常数 $c_1,c_2,\cdots,c_6$ 即六个轨道根数，对于椭圆运动，即 a,e,i,Ω,ω,τ。第六个根数 τ 为运动天体过近星点的时刻，若用平近点角 M 代替 τ，则解(2.8)和(2.9)中将不显含 t，但在这些解中并不是以 M 的形式出现，而是以真近点 f 或偏近点角 E 的形式出现。

回到原方程(2.1)，$\boldsymbol{F}_1\neq 0$，解(2.8)和(2.9)当然不满足该方程。如果要使这一无摄运动解的形式(2.8)和(2.9)仍满足原受摄运动方程(2.1)，则 $c_1,c_2,\cdots,c_6$ 不再是常数，应为 t 的函数，这就是常微分方程求解中的常数变易法。根据这一原理导出的原积分常数 $c_j(j=1,2,\cdots,6)$ 所满足的微分方程，即被称为摄动运动方程。其建立过程简叙如下：

(2.8)式对 t 求导数得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial c_j}\frac{\mathrm{d}c_j}{\mathrm{d}t} \tag{2.11}$$

由于(2.9)式亦满足受摄运动方程，故应有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}=\boldsymbol{g}(c_1\cdots,c_6,t) \tag{2.12}$$

此式再对 t 求一次导数，并让其满足受摄运动方程(2.1)，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial c_j}\frac{\mathrm{d}c_j}{\mathrm{d}t}\\&=\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_1\end{aligned} \tag{2.13}$$

而

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}=\boldsymbol{F}_0$$

由此可知，常数变易的两个条件即为

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial c_j}\frac{\mathrm{d}c_j}{\mathrm{d}t}&=0\\ \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial c_j}\frac{\mathrm{d}c_j}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{F}_1\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

其中 $\partial \boldsymbol{f}/\partial c_j$ 和 $\partial \boldsymbol{g}/\partial c_j$ 都是 c_j 和 t 的已知函数，这些偏导数中除 $\partial \boldsymbol{f}/\partial \tau$ 和 $\partial \boldsymbol{g}/\partial \tau$ 外，在第一章中均已给出。原则上可由这一方程组导出 $\mathrm{d}c_j/\mathrm{d}t$ 的显形式：

$$\frac{\mathrm{d}c_j}{\mathrm{d}t}=f(c_1,\cdots,c_6,t;\varepsilon),\quad j=1,2,\cdots,6 \tag{2.15}$$

此即我们所需要的摄动运动方程。但直接推导是比较困难的，在一些天体力学书籍中有详细的推导过程，推导方法大致可分为两类，一类是针对保守力以摄动函数形式($\partial R/\partial\sigma$)代替摄动加速度 $\boldsymbol{F}_1$ 进行推导，另一类则是直接以摄动加速度 $\boldsymbol{F}_1$ 的三分量形式(即 S,T,W，它们分别为径向、横向和轨道面法向分量)进行推导，作者曾在本章参考文献[1]中给出这类方法的一种具体推导过程。

对于摄动运动方程的建立，如果采用分析力学方法，根据常数变易原理，可以相当简单地给出所需要的摄动运动方程，在一些天体力学书籍中亦有介绍。

尽管本书是讲述天体力学方法的，上述摄动运动方程的具体推导过程并不是本书的内容，但再简单地提一下是有必要的，它可进一步让读者了解常数变易的含义及其在求解受摄运动

方程中的作用，其中最主要的一点是：无摄运动解的形式(2.8)和(2.9)，即第一章中的(1.37)和(1.46)式，仍适用于受摄运动，它是受摄运动的瞬时轨道根数与位置矢量和速度矢量之间的一个严格关系式，所不同的只是对于无摄运动 $c_j(j=1,2,\cdots,6)$ 是常数，而在受摄运动中，$c_j=c_j(t)$ 是时间 t 的函数。既然如此，受摄运动的轨道即可看成一个变化的椭圆（或二次圆锥曲线），第一章中给出的椭圆运动的各种几何关系和偏导数关系，在受摄运动中全部成立。但要注意，对时间 t 的导数却不再成立，特别是动量矩积分（或面积积分）的形式应正确地理解为

$$\left.\begin{aligned}r^2\dot{\theta}&=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\\ \dot{\theta}&=\dot{f}+\dot{\omega}+\dot{\Omega}\cos i\end{aligned}\right\}\tag{2.16}$$

只是在无摄运动中才退化为

$$r^2\dot{f}=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

对于受摄二体问题，相应于方程(2.7)的无摄运动轨道实为真实轨道的一种近似。如果方程(2.7)能包括原方程(2.1)中摄动加速度 $\boldsymbol{F}_1$ 的一部分，而且仍是可积的，那么相应的轨道就更接近于真实轨道，这被称为中间轨道。若记

$$\boldsymbol{F}_1=(\boldsymbol{F}_1)_1+(\boldsymbol{F}_1)_2\tag{2.17}$$

其中 $(\boldsymbol{F}_1)_1$ 对应可积部分，有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0+(\boldsymbol{F}_1)_1\tag{2.18}$$

相应的解为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{f}_c(c'_1,c'_2,\cdots,c'_6,t)\\ \dot{\boldsymbol{r}}&=\boldsymbol{g}_c(c'_1,c'_2,\cdots,c'_6,t)\end{aligned}\right\}\tag{2.19}$$

这就是中间轨道解，$c'_1,c'_2,\cdots,c'_6$ 为六个积分常数。之所以称其为中间轨道，是因为它介于无摄轨道与真实轨道之间。在中间轨道基础上求原受摄运动方程(2.1)的解，同样可采用上述常数变易法，建立相应的求剩余摄动的中间轨道摄动运动方程，有

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\boldsymbol{f}_c}{\partial c'_j}\frac{\mathrm{d}c_j'}{\mathrm{d}t}&=0\\ \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\boldsymbol{g}_c}{\partial c'_j}\frac{\mathrm{d}c_j'}{\mathrm{d}t}&=(\boldsymbol{F}_1)_2\end{aligned}\right\}\tag{2.20}$$

其中偏导数 $\partial\boldsymbol{f}_c/\partial c'_j$ 和 $\partial\boldsymbol{g}_c/\partial c'_j$ 要比前面相应的椭圆轨道的 $\partial\boldsymbol{f}/\partial c_j$ 和 $\partial\boldsymbol{g}/\partial c_j$ 复杂，直接从(2.20)给出 $\mathrm{d}c_j'/\mathrm{d}t=f(c_j',t;\varepsilon)$ 这一显形式更困难，同样可采用分析力学方法简单地给出这一方程。但是，天体力学发展到今天，中间轨道理论并未广泛地应用于解决实际问题，其原因是中间轨道解(2.19)较复杂，在已给出的中间轨道中几乎都涉及到椭圆积分，而不像无摄运动轨道那样，只涉及到最简单的三角函数。因此，尽管它比椭圆轨道更接近真实轨道，但仍不能满足当今的高精度要求，而在中间轨道基础上求剩余摄动相当麻烦，总的效果通常还不如受摄二体问题模型。正因为如此，作为天体力学方法，将不再具体介绍这一内容，关于已出现的几种中间轨道，请读者参看有关文献，本章参考文献[1]第十三章中亦有介绍。

对于受摄二体问题，还有一种求解方法，即不是直接从原方程(2.1)出发建立相应的摄动运动方程，进而求摄动解，而是引进摄动坐标的概念，即

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c\tag{2.21}$$

这里 $\boldsymbol{r}_c$ 对应参考轨道。若取无摄运动作为参考轨道，则有

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{r}}_c \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{u}}&=\ddot{\boldsymbol{r}}-\ddot{\boldsymbol{r}}_c\\&=-\mu\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{r}_c}{r_c^3}\right)+\boldsymbol{F}_1\end{aligned} \tag{2.23}$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t},\qquad \dot{\boldsymbol{r}}_c=\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial t} \tag{2.24}$$

方程(2.23)即相当于摄动运动方程，若能给出相应的解

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t),\qquad \dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}(t) \tag{2.25}$$

便可由此得出原受摄二体问题的解：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)&=\boldsymbol{r}_c(t)+\boldsymbol{u}(t)\\\dot{\boldsymbol{r}}(t)&=\dot{\boldsymbol{r}}_c(t)+\dot{\boldsymbol{u}}(t)\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

此即坐标摄动法。如何根据方程(2.23)在参考轨道基础上求解$\boldsymbol{u}(t)$，可参看本章参考文献[2]第十三章。但从分析方法的角度来看，求解$\boldsymbol{u}(t)$的过程不比求解摄动运动方程(2.15)简单，本章参考文献[3]曾就人造地球卫星在地球形状扁率摄动这一简单的力学模型，给出过相应的求解过程，它清楚地表明了这一点。不过，引进摄动坐标这一思想，对用数值方法求解受摄运动方程到是另辟了一条有别于直接求解$\boldsymbol{r}(t)$或$c_j(t)$的途径，这将在后面第八章中介绍，即恩克(Encke)方法和改进的恩克方法。

2.2 摄动运动方程的各种形式

这一节将直接写出常用的几种摄动运动方程，以便下面几章介绍求解摄动运动方程的各种方法。有关这些方程的推导原理以及一些关键之处，在上一节中已作了较详细的阐述，因此，略去推导过程不应成为问题。

1. $\partial R/\partial\sigma$ 型

若摄动力是保守力，则相应的摄动加速度$\boldsymbol{F}_1$可由下式表达：

$$\boldsymbol{F}_1=\mathrm{grad}R \tag{2.27}$$

这里的R即摄动函数，一般有

$$R=R(\boldsymbol{r},t;\varepsilon)$$

其形式由具体的摄动源所确定。例如，在具有非球形中心天体的受摄二体问题系统中，中心天体的引力位是

$$V=V_0(r)+\Delta V(\boldsymbol{r},t) \tag{2.28}$$

其中$V_0=\mu/r$为球形部分，ΔV即非球形部分，且有

$$|\Delta V|/V_0=\varepsilon\ll 1$$

那么，ΔV就是该系统的摄动函数，即

$$R(\boldsymbol{r},t;\varepsilon)=\Delta V \tag{2.29}$$

又如，摄动源为第三体引力时，相应的摄动函数为

$$\left.\begin{aligned}&R=Gm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{r'^3}\right)\\&\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\quad r'=|\boldsymbol{r}'|,\quad \Delta=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\end{aligned}\right\}\tag{2.30}$$

其中 m' 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别为摄动天体的质量和位置矢量。在受摄二体问题系统中，有 $m'\ll M$，或 $r\ll(\Delta,r')$，或两者兼而有之。

在存在 R 的情况下，利用常数变易原理导出的方程，即为拉格朗日(Lagrange)型的摄动运动方程，其形式如下：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M}\\&\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial\omega}\\&\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\cos i\frac{\partial R}{\partial\omega}-\frac{\partial R}{\partial\Omega}\right)\\&\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}\\&\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\cos i\frac{d\Omega}{dt}\\&\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=n-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}\end{aligned}\right\}\tag{2.31}$$

这里第六个根数没有取运动天体过近星点的时刻 τ，亦未取 $M_0=-n\tau$，$n=\sqrt{\mu}a^{-3/2}$，而是选择了平近点角 M。其原因很简单，一是因为在受摄运动中，τ 和 M_0 都是变化的，已无实用意义，而平近点角 M 的意义仍是明确的，引用方便；另一原因是因为

$$M-n(t-\tau)$$

它是两个根数 a 和 τ 的组合，在相应的摄运动方程中出现的 $\partial R/\partial a$ 就不再涉及到 R 中通过 M 隐含 a 的问题，因此时 M 本身是独立的。

摄动运动方程(2.31)有一个明显的特点：在前三个方程的右端项中，只涉及到 $\partial R/\partial(\Omega,\omega,M)$，而在后三个方程的右端项中却只涉及到 $\partial R/\partial(a,e,i)$，有一种“对称”性。

2. (S,T,W)型和(U,N,W)型

在有些情况下，摄动力并非保守力，即便是保守力，亦可用摄动加速度分量的形式来建立相应的摄动运动方程。当然，它可由上述 $\partial R/\partial\sigma$ 型的方程转化而得，在很多天体力学书籍中就是这么写的，但对非保守力情况不易说清这一原理，因它不存在 R。因此，还是直接通过摄动加速度 $\boldsymbol{F}_1$ 进行推导为好，而且也可由它转化为 $\partial R/\partial\sigma$ 型的方程，见本章参考文献[1]第四章。通常是将 $\boldsymbol{F}_1$ 分解成径向、横向和轨道面法向三分量，依次记为 S,T,W；或分解成切向、主法向和次法向(即轨道面法向)三分量，分别记为 U,N,W。以这种摄动加速度分量按常数变易原理导出的方程，即为高斯型摄动运动方程，下面列出具体形式。

(1)S,T,W 型

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[Se\sin f+T(1+e\cos f)]\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[S\sin f+T(\cos f+\cos E)]\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}&=\frac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right]-\cos i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}&=n-\frac{1-e^2}{nae}\left[-S\left(\cos f-2e\,\frac{r}{p}\right)+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right]
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.32}
$$

其中 $u=f+\omega, p=a(1-e^2)$，f 和 E 分别为真近点角和偏近点角。

(2)U,N,W 型

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}U\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2(\cos f+e)U-\sqrt{1-e^2}\sin EN]\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}[2\sin fU+(\cos E+e)N]-\cos i\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}&=n-\frac{1-e^2}{nae}(1+2e\cos f+e^2)^{-1/2}\left[\left(2\sin f+\frac{2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)U+(\cos E-e)N\right]
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.33}
$$

$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$与前面相同。

关于 S,T,W 三分量如何给出，这要根据具体摄动源的状况而定。如果不易直接给出，那么当摄动力是保守力，并已知摄动函数 R 的形式，则可由下列关系式给出 S,T,W：

$$
S=\frac{\partial R}{\partial r},\quad T=\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial u},\quad W=\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r\sin u}\frac{\partial R}{\partial i}
\tag{2.34}
$$

如果 $\boldsymbol{F}_1$ 的直角坐标分量 F_{1x},F_{1y},F_{1z} 容易给出，则可由下列关系

$$
\begin{pmatrix}S\\T\\W\end{pmatrix}=R(\Omega,i,u)\begin{pmatrix}F_{1x}\\F_{1y}\\F_{1z}\end{pmatrix}
$$

导出 S,T,W，其中

$$
R(\Omega,i,u)=R_z(u)R_x(i)R_z(\Omega)
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\cos u\cos\Omega+\sin u(-\cos i\sin\Omega) & \cos u\sin\Omega+\sin u(\cos i\cos\Omega) & \sin u\sin i\\
-\sin u\cos\Omega+\cos u(-\cos i\sin\Omega) & -\sin u\sin\Omega+\cos u(\cos i\cos\Omega) & \cos u\sin i\\
\sin i\sin\Omega & -\sin i\cos\Omega & \cos i
\end{pmatrix}
$$

于是，由 $\boldsymbol{F}_1$ 到(S,T,W)的转换公式即可写成

$$
S=\boldsymbol{F}_1\cdot\hat{r},\quad T=\boldsymbol{F}_1\cdot\hat{t},\quad W=\boldsymbol{F}_1\cdot\hat{w}
\tag{2.35}
$$

其中 $\hat{r},\hat{t},\hat{w}$ 分别为径向、横向和轨道面法向单位向量，有

$$\hat{r}=\begin{pmatrix}\cos u(\cos\Omega)+\sin u(-\cos i\sin\Omega)\\ \cos u(\sin\Omega)+\sin u(\cos i\cos\Omega)\\ \sin u(\sin i)\end{pmatrix}=\cos u\hat{P}_*+\sin u\hat{Q}_* \tag{2.36}$$

$$\hat{t}=-\sin u\hat{P}_*+\cos u\hat{Q}_* \tag{2.37}$$

$$\hat{w}=\begin{pmatrix}\sin i & \sin\Omega\\ -\sin i & \cos\Omega\\ \cos i & \end{pmatrix}=\hat{P}_*\times\hat{Q}_* \tag{2.38}$$

这里的 $\hat{P}_*$ 和 $\hat{Q}_*$ 与第一章中的 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 方向不同，其表达式为

$$\left.\begin{aligned}\hat{P}_*&=\begin{pmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{pmatrix}\\ \hat{Q}_*&=\begin{pmatrix}-\cos i\sin\Omega\\ \cos i\cos\Omega\\ \sin i\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

(S,T) 与 (U,N) 之间的转换关系为[1]

$$\left.\begin{aligned}S&=\frac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}U-\frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}N\\ T&=\frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}U+\frac{e\sin f}{\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}N\end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

因此，方程(2.33)容易由方程(2.32)导出，事实上也是这样做的。

3. 摄动运动方程的正则形式

前面已提过，对于 Hamilton 系统，采用分析力学方法建立相应的摄动运动方程是很容易的[1]，当采用正则共轭变量——德洛纳(Delaunay)变量 L,G,H,l,g,h 时，相应的摄动运动方程的形式极其简单，有一种共轭对称性，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial l},\quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L}\\ \frac{dG}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial g},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}\\ \frac{dH}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial h},\quad \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}\end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

其中 F 为 Hamilton 函数，但与习惯上采用的 Hamilton 函数 K(区别于变量 H)相差一符号，即

$$F=-K=\frac{\mu^2}{2L^2}+R \tag{2.42}$$

因此，方程(2.41)亦与习惯上采用的形式相差一符号。这里的 L,G,H 为矩(角动量)，相当于广义动量 p，而 l,g,h 为角变量，相当于广义坐标 q。它们与椭圆轨道根数之间的关系如下

$$\left.\begin{aligned} &L=\sqrt{\mu a}, \quad l=M \\ &G=\sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad g=\omega \\ &H=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i, \quad h=\Omega \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

由此不难看出，容易由方程(2.41)利用关系(2.43)导出前面的以轨道根数作为基本变量的拉格朗日摄动运动方程(2.31)。

2.3 摄动运动方程的奇点与处理方法

从摄动运动方程(2.32)可以看出，$\frac{d\omega}{dt}$和$\frac{dM}{dt}$的右端含有因子$\frac{1}{e}$，而$\frac{d\Omega}{dt}$和$\frac{d\omega}{dt}$的右端含有因子$1/\sin i$，因此，$e=0$和$\sin i=0$(即$i=0$或180°)是摄动运动方程的奇点。它将在后面几章给出的摄动解中反映出来，当$e\approx0$，$i\approx0$或180°时，解就将失效，但是，相应的运动仍然是正常的，例如近圆轨道显然是存在的。这一小e、小i问题的产生，是由于相应的基本变量的选择不当引起的。因为当$e=0$时，ω不确定，与之有关的M也随之不确定；而当$i=0$或180°时，Ω不确定，与之有关的ω亦随之不确定。这种选择不当，在上述方程中必然要反映出来，只要对相应变量的选择加以修改，即可消除上述奇点。

1. 适用于任意偏心率($0\leqslant e<1$)的摄动运动方程

下述变量
$$a, i, \Omega, \xi=e\cos\omega, \quad \eta=-e\sin\omega, \quad \lambda=M+\omega \tag{2.44}$$
对$e=0$而言是一组无奇点变量，显然，当$e=0$时，ξ,η,λ均是有意义的。至于ξ,η的选择亦可改为
$$\xi'=e\sin\omega, \quad \eta'=e\cos\omega \tag{2.45}$$
与ξ,η的关系为
$$\xi=\eta', \quad \eta=-\xi' \tag{2.46}$$
读者如要按(2.45)式选择，只要根据关系(2.46)，把本书的ξ和η全部作相应的改变即可。

引用由(2.44)式定义的无奇点变量后，即可将原摄动运动方程的奇点消除。按定义(2.44)和下列关系
$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt}=\cos\omega\frac{de}{dt}-e\sin\omega\frac{d\omega}{dt} \\ &\frac{d\eta}{dt}=-\sin\omega\frac{de}{dt}-e\cos\omega\frac{d\omega}{dt} \\ &\frac{d\lambda}{dt}=\frac{dM}{dt}+\frac{d\omega}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$
即可导出以新变量表达的摄动运动方程，其形式如下：

(1)$\partial R/\partial\sigma$型

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\lambda}\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left[\cos i\left(\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}+\frac{\partial R}{\partial\lambda}\right)-\frac{\partial R}{\partial\Omega}\right]\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\eta}-\xi\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\lambda}-\eta\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\xi}-\eta\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\lambda}+\xi\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}&=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\xi\frac{\partial R}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\}\tag{2.48}
$$

(2) S,T,W 型

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\sin u+\eta\cos u)+T\left(\frac{p}{r}\right)\right]\\
\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{S\sin u+\frac{T}{\sqrt{1-e^2}}\left[(\cos\tilde{u}+\sqrt{1-e^2}\cos u)-\frac{\xi}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi\cos\tilde{u}-\eta\sin\tilde{u})\right]\right\}\\
&\quad-\eta\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{S\cos u+\frac{T}{\sqrt{1-e^2}}\left[-(\sin\tilde{u}+\sqrt{1-e^2}\sin u)-\frac{\eta}{1+\sqrt{1-e^2}}(\xi\cos\tilde{u}-\eta\sin\tilde{u})\right]\right\}\\
&\quad+\xi\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}&=n-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left\{2S\sqrt{1-e^2}\left(\frac{r}{p}\right)+\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[S(\xi\cos u-\eta\sin u)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-T\left(1+\frac{r}{p}\right)(\xi\sin u+\eta\cos u)\right]\right\}-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\}\tag{2.49}
$$

其中 $\tilde{u}=E+\omega$。$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$ 同(2.32)中的形式。

上述变换过程中用到

$$
1-\sqrt{1-e^2}=\frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\tag{2.50}
$$

在新方程中已不再出现因子 $1/e$,即 $1/\sqrt{\xi^2+\eta^2}$。

2. 适用于任意偏心率($0\leqslant e<1$)和倾角($0\leqslant i<180°$)的摄动运动方程

下述变量

$$
a,\ e,\ h=\sin i\cos\Omega,\ k=-\sin i\sin\Omega,\ \tilde{\omega}=\omega+\Omega,M\tag{2.51}
$$

对 $i=0$ 而言是一组无奇点变量,显然,当 $i=0$ 时,$h,k,\tilde{\omega}$ 是有意义的。一般不会出现 $i=180°$情

况，而同时出现 $e=0$ 和 $i=0$ 的情况倒是有的，为此引进下述无奇点变量：

$$\left.\begin{aligned}&a,\quad h=\sin i\cos\Omega,\quad k=-\sin i\sin\Omega\\&\xi=e\cos(\omega+\Omega),\quad \eta=-e\sin(\omega+\Omega),\quad \lambda=M+\omega+\Omega\end{aligned}\right\}\tag{2.52}$$

相应地有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}&=\cos i\cos\Omega\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\sin i\sin\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}&=-\cos i\sin\Omega\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\sin i\cos\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}&=\cos(\omega+\Omega)\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-e\sin(\omega+\Omega)\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)\\\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}&=-\sin(\omega+\Omega)\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-e\cos(\omega+\Omega)\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)\\\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\}\tag{2.53}$$

针对实际应用情况，下面列出 $\partial R/\partial\sigma$ 型的无奇点摄动运动方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\lambda}\\\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}&=\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{\partial R}{\partial k}+\frac{h}{1+\cos i}\left(-\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\partial R}{\partial\lambda}\right)\right]\\\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}&=\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left[-\frac{\partial R}{\partial h}+\frac{k}{1+\cos i}\left(-\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\partial R}{\partial\lambda}\right)\right]\\\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}&=\frac{\eta\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos i)}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\xi\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\lambda}\\\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\xi\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos i)}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\eta\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\lambda}\\\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}&=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\cos i)}\left(h\frac{\partial R}{\partial h}+k\frac{\partial R}{\partial k}\right)+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(\xi\frac{\partial R}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.54}$$

这种方程的右端项中不再含有 $\frac{1}{e}$ 和 $\frac{1}{\sin i}$ 两种因子。在给出方程(2.54)的过程中，除用到(2.50)式外，还用到

$$1-\cos i=\frac{\sin^2 i}{1+\cos i}\tag{2.55}$$

3. 无奇点正则共轭变量

只要变量选择不当，小 e 和小 i 问题在正则运动方程中同样要出现，下面列出两组无奇点正则共轭变量。

(1)消除奇点 $e=0$ 的正则共轭变量 $(\tilde{L},\tilde{G},\tilde{H},\tilde{l},\tilde{g},\tilde{h})$：

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{L}=L & &\tilde{l}=l+g\\&\tilde{G}=\sqrt{2(L-G)}\cos g, & &\tilde{g}=-\sqrt{2(L-G)}\sin g\\&\tilde{H}=H, & &\tilde{h}=h\end{aligned}\right\}\tag{2.56}$$

其中

$$\sqrt{2(L-G)}=[L\ \sqrt{2/(L+G)}]e \tag{2.57}$$

这组无奇点变量与前面由(2.44)式定义的那一组相对应。

(2)同时消除奇点 $e=0$ 和 $i=0$ 的正则共轭变量$(\tilde{L},\tilde{G},\tilde{H},\tilde{l},\tilde{g},\tilde{h})$：

$$\left.\begin{array}{ll}\tilde{L}=L, & \tilde{l}=l+g+h \\ \tilde{G}=\sqrt{2(L-G)}\cos(g+h), & \tilde{g}=-\sqrt{2(L-G)}\sin(g+h) \\ \tilde{H}=\sqrt{2(G-H)}\cos h, & \tilde{h}=-\sqrt{2(G-H)}\sin h\end{array}\right\} \tag{2.58}$$

其中

$$\sqrt{2(G-H)}=[G\ \sqrt{2/(G+H)}]\sin i \tag{2.59}$$

这组无奇点变量则与前面由(2.52)式定义的那一组对应。(2.56)式和(2.58)式中出现的 L，G,H,l,g,h 即原德洛纳变量。

这里不再列出由上述无奇点正则共轭变量表达的摄动运动方程，因为在求解摄动运动方程时，若采用正则共轭变量，其解法主要是变换方法，它只涉及到相应的 Hamilton 函数的具体形式。关于这一点，后面第七章将会具体讨论。

2.4 小参数幂级数解的构造——摄动法

经常数变易法的处理，原受摄运动方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_1$$

的求解问题已转化为相应的摄动运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon) \tag{2.60}$$

的求解问题。这里 σ 表示一 6 维向量、6 个分量即瞬时轨道根数，或相应的正则共轭变量，或上一节引进的无奇点变量。右函数 f_ε 则是 6 维向量函数，有

$$|(f_\varepsilon)_i|=0(\varepsilon)\ll 1,\quad i=1,2,\cdots,6 \tag{2.61}$$

原受摄运动问题的解将由两部分组成，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\sigma,t),\qquad \dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}(\sigma,t) \tag{2.62}$$

$$\sigma(t)=\sigma(\sigma_0,t_0;t,\varepsilon),\qquad \sigma(t_0)=\sigma_0 \tag{2.63}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的表达式是已知的，即第一章中的(1.37)式和(1.46)式，它们对应于一个瞬时椭圆。σ_0 即 t_0 时椭圆根数或相应变量的初值。剩下的问题是如何求解小参数方程(2.60)，以给出解 $\sigma(t)$。

从方程(2.60)的表达式来看，当所要讨论的力学系统涉及多个受摄二体问题时，相应的摄动运动方程的形式和特征均不会改变，仍归结为方程(2.60)的形式，只不过其维数增加而已，例如有两个运动天体时，将由 6 维变成 12 维。因此亦能用单个受摄二体问题的力学模型进行讨论，所有结果都可以毫无困难地推广到多个运动天体情况。

尽管方程(2.60)是复杂的非线性方程组，但其右端含小参数 ε，给出相应的小参数幂级数解并不困难，已有成熟的方法，即摄动法。为了让读者深入了解摄动法，以便更好地学习后面几

章要介绍的针对动力天文的各种摄动运动方程的解法，这里有必要在天体力学基础上对小参数幂级数解的存在性以及如何构造相应级数解的基本过程作一简要阐述。

1. 小参数幂级数解的存在性

这是常微分方程分析理论中的一个基本问题，与天体力学密切相关的一个基本定理，即邦加雷(Poincare)定理，叙述如下：

设小参数方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=X_i(x_1,\cdots,x_n,t;\varepsilon),\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2.64}$$

的右函数 X_i 当 $0\leqslant t<t_1$ 时对 t 连续且可展为 x 及 ε 的幂级数，则此方程组的解 $x_i=f_i(t,\varepsilon)$ 当 $0\leqslant t\leqslant t_1$，$\varepsilon$ 充分小时，可展为小参数 ε 的收敛幂级数，t_1 满足下列条件

$$\frac{\alpha\varepsilon}{(1+\alpha\varepsilon)^2}\exp(n\alpha Mt_1)<\frac{1}{4} \tag{2.65}$$

其中 M 是右函数 X_i 在所讨论区间上的最大值，α 是与变量 x_i 有关的实数。

这一收敛条件可理解为相应幂级数解的收敛范围，对于天体运动而言，可理解为该级数解在天体运动弧段 s 满足下列条件时是有意义的，即

$$s\sim\frac{1}{\varepsilon} \tag{2.66}$$

这里改用弧段 s，是因为 t 涉及到不同的时间尺度和运动速度的快慢，无“统一”的实际意义，这将会从后面几章的讨论中看清。显然，摄动小参数 ε 愈小，幂级数解的收敛区间就愈大，这是容易理解的。在收敛区间内，可构造相应的幂级数解，但这样构造的幂级数解只能反映运动天体在局部区间的运动特征，它却不能反映运动的全局结构。有关这一问题已不是本书讨论的内容。

2. 小参数幂级数解的构造——摄动法

如果第六个根数采用 τ 或 $M_0=-n\tau$，则方程(2.60)的右函数 f_i 的 6 个元素的量级均为 $O(\varepsilon)$，即满足(2.61)式。然而，通常第六个根数是采用平近点角 M，那么上述右函数 f_i 的第 6 个元素含有一项 $n=\sqrt{\mu}a^{-3/2}=O(\varepsilon^0)$，此时方程(2.60)应改写成下列形式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(a)+f_1(\sigma,t,\varepsilon) \tag{2.67}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&f_0(a)=\delta n\\&\delta=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1)^T\end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

$$|f_{1i}(\sigma,t,\varepsilon)|=O(\varepsilon),\qquad i=1,2,\cdots,6 \tag{2.69}$$

方程(2.67)的小参数幂级数解形式为

$$\sigma(t)=\sigma^{(0)}(t)+\Delta\sigma^{(1)}(t,\varepsilon)+\Delta\sigma^{(2)}(t,\varepsilon^2)+\cdots+\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)+\cdots \tag{2.70}$$

$$\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)=\varepsilon^l\beta_l(t),\qquad l=1,2,\cdots$$

其中 $\sigma^{(0)}(t)$是对应 $\varepsilon=0$ 的无摄运动解,即

$$\sigma^{(0)}(t)=\sigma_0+\delta n_0(t-t_0) \tag{2.71}$$

或具体写成

$$a^{(0)}(t)=a_0,\quad e^{(0)}(t)=e_0,\quad i^{(0)}(t)=i_0$$

$$\Omega^{(0)}(t)=\Omega_0,\quad \omega^{(0)}(t)=\omega_0$$

$$M^{(0)}(t)=M_0+n_0(t-t_0)$$

其中 $\sigma_0(a_0,e_0,\cdots,M_0)$是历元(即初始时刻)$t_0$ 时的根数。不难看出,对 ε 展开的小参数幂级数解(2.70),实际上就是解 $\sigma(t)$在参考轨道——无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$"处"的展开。$\Delta\sigma^{(l)}(t,\varepsilon^l)$即 l 阶摄动变化项,简称 l 阶摄动项。将形式解(2.70)代入方程(2.67),得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sigma^{(0)}+\Delta\sigma^{(1)}+\Delta\sigma^{(2)}+\cdots+\Delta\sigma^{(l)}+\cdots]\\&=f_0(a)+\frac{\partial f_0}{\partial a}[\Delta a^{(1)}+\Delta a^{(2)}+\cdots]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}[\Delta a^{(1)}+\cdots]^2+\cdots\\&+f_1(\sigma,t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}[\Delta\sigma_j^{(1)}+\Delta\sigma_j^{(2)}+\cdots]\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}[\Delta\sigma_j^{(1)}+\cdots][\Delta\sigma_k^{(1)}+\cdots]+\cdots\end{aligned} \tag{2.72}$$

该式右端各项中出现的根数 σ 均应取参考轨道 $\sigma^{(0)}(t)$。若级数(2.70)收敛,则可比较展开式(2.72)两端同次幂(ε^l)的系数,于是得

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^{(0)}(t)=\sigma_0+\delta n_0(t-t_0)\\&\Delta\sigma^{(1)}(t)=\int_{t_0}^{t}[\delta\frac{\partial n}{\partial a}\Delta a^{(1)}+f_1(\sigma,t,\varepsilon)]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t\\&\Delta\sigma^{(2)}(t)=\int_{t_0}^{t}[\delta(\frac{\partial n}{\partial a}\Delta a^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(\Delta\sigma^{(1)})^2)+\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}\Delta\sigma_j^{(1)}]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t\\&\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.73}$$

显然,这是一个有效的递推过程:由低阶摄动求高阶摄动,将 $f_1(\sigma,t,\varepsilon)$的具体形式代入后,即可给出解(2.70)中各阶摄动项的表达式,从而构造出摄动运动方程(2.67)的小参数幂级数解。这一构造级数解的方法,即摄动法。

下面举一简单例子,以体现上述构造级数解的具体过程。

例:用摄动法求解二阶小参数方程

$$\ddot{x}+\omega^2x=-\varepsilon x^3,\qquad \varepsilon\ll 1 \tag{2.74}$$

其中 $\omega>0$ 是实常数。

解:当 $\varepsilon=0$ 时,无摄运动方程

$$\ddot{x}+\omega^2x=0$$

的解为

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos(\omega t+M_0)\\\dot{x}&=-\omega a\sin(\omega t+M_0)\end{aligned}\right\} \tag{2.75}$$

这里初始时刻 $t_0=0$，积分常数 a 和 M_0 相当于两个无摄根数。

当 $\varepsilon\neq 0$ 时，用常数变易法建立相应的摄动运动方程，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial a}\dot{a}+\frac{\partial x}{\partial M_0}\dot{M}_0=0\\&\frac{\partial \dot{x}}{\partial a}\dot{a}+\frac{\partial \dot{x}}{\partial M_0}\dot{M}_0=-\varepsilon x^3\end{aligned}\right\}\tag{2.76}$$

由此导出摄动运动方程如下：

$$\dot{a}=\frac{\varepsilon}{\omega}a^4\left(\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{8}\sin 4M\right)=(f_1)_a\tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}\dot{M}&=\omega+\dot{M}_0\\&=\omega+\frac{\varepsilon}{\omega}a^2\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2M+\frac{1}{8}\cos 4M\right)-\omega+(f_1)_M\end{aligned}\tag{2.78}$$

其中 $M=M_0+\omega t$，它代替了 M_0，该方程的小参数幂级数解即

$$\sigma(t)=\sigma^{(0)}(t)+\Delta\sigma^{(1)}(t)+\cdots\tag{2.79}$$

其中

$$\sigma^{(0)}(t)=\begin{bmatrix}a_0\\M_0+\omega t\end{bmatrix}\tag{2.80}$$

因 $\omega=\text{const}$，于是由

$$\Delta\sigma^{(1)}(t)=\int_0^t[f_1(\sigma,t,\varepsilon)]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t$$

积分得

$$\Delta a^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}a^3\left(-\frac{1}{8}\cos 2M-\frac{1}{32}\cos 4M\right)_0^t\tag{2.81}$$

$$\Delta M^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}a^2\left(\frac{3}{8}\omega t+\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{32}\sin 4M\right)_0^t\tag{2.82}$$

二阶摄动项的计算公式为

$$\Delta a^{(2)}=\int_0^t\left[\frac{\partial(f_1)_a}{\partial a}\Delta a^{(1)}+\frac{\partial(f_1)_a}{\partial M}\Delta M^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t\tag{2.83}$$

$$\Delta M^{(2)}=\int_0^t\left[\frac{\partial(f_1)_M}{\partial a}\Delta a^{(1)}+\frac{\partial(f_1)_M}{\partial M}\Delta M^{(1)}\right]_{\sigma^{(0)}}\mathrm{d}t\tag{2.84}$$

将 $\Delta\sigma^{(1)}$ 代入后积分即得二阶摄动项 $\Delta a^{(2)}$ 和 $\Delta M^{(2)}$。不难看出，由于 $\Delta M^{(1)}$ 中含有 ωt 这种项，那么求 $\Delta\sigma^{(2)}(t)$ 时，将会出现下列形式的积分：

$$\int_0^t\begin{pmatrix}\sin kM\\\cos kM\end{pmatrix}\omega t\mathrm{d}t,\qquad k=0,1,\cdots\tag{2.85}$$

这正是摄动法在动力天文中用来求解摄动运动方程时应重视的问题，下一节专门讨论它。

2.5 周期项和长期项

如果摄动力是保守力，在有限时间间隔内，通常 a,e,i 仅有周期变化，Ω,ω 有随时间的长期变化，但比 M(或 E,f)的变化缓慢得多，因为 M 是直接反映运动天体绕中心天体运动的轨

道根数，而 Ω 和 ω 的变化仅仅是由摄动引起的。故通常称 a,e,i 为“不变量”，Ω 和 ω 为慢变量，而 M（或 E,f）为快变量。在上述情况下，各阶摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)},\Delta\sigma^{(2)},\cdots$ 中一般包含三种性质不同的项：长期项、长周期项和短周期项，长期项是 $(t-t_0)$ 的线性函数或多项式，其系数仅是 a,e,i 的函数，长周期项是 Ω 或 ω 的三角函数，而短周期项则是 M 的周期函数（亦是三角函数）。对于短周期项，也会因某种通约而导致其转化为长周期项（后面有关章节将会讨论它）。另外，还有形如 $(t-t_0)\sin(At+B)$ 和 $(t-t_0)\cos(At+B)$ 等形式的泊松（Poisson）项，亦称混合项，上节最后提到的(2.85)型的积分就可能导致这种混合项的出现。

从上一节用摄动法构造级数解的过程和例子中不难看出，即使摄动力为保守力，也会导致 $\varepsilon(t-t_0),\varepsilon^2(t-t_0)^2,\cdots$ 这种多项式型的长期项的出现，而且与 ω 或 Ω 有关的长周期项将会变为长期项或泊松项。因为参考轨道取无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$，那么将有

$$\int_{t_0}^{t}\cos\omega_0 \mathrm{d}t = \cos\omega_0(t-t_0)$$

再按摄动解的构造过程(2.73)即可导致 $(t-t_0)^2,(t-t_0)^3,\cdots$ 这种类型的长期项或泊松项的出现。而若积分时，ω 取为 $\bar{\omega}=\omega_0+\dot{\omega}(t-t_0)$，让其代替 $\omega^{(0)}(t)=\omega_0$，则上述积分变为

$$\int_{t_0}^{t}\cos\bar{\omega}\mathrm{d}t = \frac{\sin\bar{\omega}}{\dot{\omega}}\Big|_{t_0}^{t}$$

此为长周期项，从而就不会出现上而提到的那些摄动项，这一点是相当重要的。从定性角度看，当摄动力为保守力时，通常 a,e,i 是没有长期变化的，但按上述经典摄动法来构造摄动解，即会导致 a,e,i 出现长期变化，这就歪曲了轨道变化的性质。即使从定量角度来看，虽然对于短弧而言无关紧要，但对于长弧情况，长周期项与长期项的差别就明显了，这将影响解的精度。因此，选择参考轨道为无摄运动解的经典摄动法有明显的缺点，对它进行改进是完全必要的。

本书将要介绍的各种方法，实质上就是改进的摄动法，相应的参考轨道不再是最简单的无摄运动解 $\sigma^{(0)}(t)$，即初始椭圆轨道，而是一种长期进动椭圆，相应的轨道根数是带有长期变化的所谓平均根数 $\bar{\sigma}(t)$，因此它又不同于通常意义的中间轨道，故不会引起像中间轨道理论中遇到的那些复杂性。这种改进的实质，即将摄动变化项按其不同的性质区分开，以解除经典摄动法中所遇到的问题。

参 考 文 献

[1]刘林，《人造地球卫星轨道力学》，高等教育出版社，1992。

[2]Brouwer, D. and Clemence, G. M., *Method of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1961.

刘林、丁华译，《天体力学方法》，科学出版社，1986。

[3]刘林、侯东晖，人造地球卫星观测与研究，1990，No.1，12。

第三章　平均根数法

在上一章中已指出，求解摄动运动方程的经典摄动法有明显的缺点，对于较长弧段，其定量计算精度不理想，如果取项太多则难以实现，即使在一定精度前提下，它也不能真实地反映轨道变化的规律。导致这一状况的原因是参考轨道(即初始时刻的瞬时椭圆)太简单，因此有必要改进参考轨道的选择。非线性力学中的一种渐近法，即平均法，其参考解就很有特点，本章要介绍的平均根数法就是将这种类型的参考解应用于摄动法。

3.1　参考解的选择——平均根数的引入

仍记

$$\sigma=(a,e,i,\Omega,\omega,M)^{T}$$

相应的摄动运动对应的初值问题为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\sigma}{dt}=f_0(a)+f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)\\&\sigma_0=\sigma(t_0)\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&f_0(a)=\delta n,n=\sqrt{\mu}a^{-3/2}\\&\delta=(0,0,0,0,0,1)^{T}\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

$f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)$即对应摄动部分。

现将根数的摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)},\Delta\sigma^{(2)},\cdots$按其性质分解成长期变化、长周期变化和短周期变化三部分(其定义见上一章 2.5)，分别记作 $\sigma_1(t-t_0),\cdots,\Delta\sigma_l^{(1)}(t),\cdots,\Delta\sigma_s^{(1)}(t),\cdots$，而相应的方程(3.1)的小参数幂级数解的形式将改为

$$\sigma(t)=\bar{\sigma}(t)+\sigma_l^{(1)}(t)+\cdots+\sigma_s^{(1)}(s)+\cdots\tag{3.3}$$

其中

$$\sigma(t)=\bar{\sigma}^{(0)}(t)+\sigma_1(t-t_0)+\cdots\tag{3.4}$$

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t)=\bar{\sigma}_0+\delta\bar{n}(t-t_0)\tag{3.5}$$

$$\bar{\sigma}_0=\bar{\sigma}(t_0)=\sigma_0-[\sigma_l^{(1)}(t_0)+\cdots+\sigma_s^{(1)}(t_0)+\cdots]\tag{3.6}$$

上述形式解表明，原摄动变化 $\Delta\sigma^{(1)}(t),\Delta\sigma^{(2)}(t),\cdots$，不仅按其变化性质分成不同部分，而且改为以摄动项表达的形式，即原

$$\Delta\sigma_l^{(1)}(t)=\sigma_l^{(1)}(t)-\sigma_l^{(1)}(t_0),\quad\Delta\sigma_s^{(1)}(t)=\sigma_s^{(1)}(t)-\sigma_s^{(1)}(t_0),\cdots$$

在表达式(3.3)中只出现 $\sigma_l^{(1)}(t),\cdots,\sigma_s^{(1)}(t),\cdots$，而 $\sigma_l^{(1)}(t_0),\cdots,\sigma_s^{(1)}(t_0),\cdots$已按(3.6)式从 σ_0 中

消去。这样的分解就使得$\bar{\sigma}(t)$只包含长期变化，故称其为平均轨道根数，简称平均根数，或平根数。

平均根数法就是取$\bar{\sigma}(t)$为其参考解，显然，$\bar{\sigma}(t)$对应的仍是一个椭圆轨道，但它不再是一个固定不变的椭圆，而是一个包含长期摄动变化的椭圆。在保守力摄动下，它将是一个长期进动椭圆，即该椭圆轨道平面和拱线方向在空间转动。因此，这种参考解又不同于通常意义下的中间轨道，原椭圆运动的各种几何关系式对它仍适用。这就表明，平均根数法仍是建立在受摄二体问题基础上的一种摄动法，可以称其为改进的摄动法。

3.2 平均根数法——摄动解的构造

1. 摄动解的构造——形式解的计算[1],[2]

通常，方程(3.1)右函数的摄动部分$f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)$亦可展为小参数的幂级数，即

$$f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)=f_1(\sigma,t,\varepsilon)+f_2(\sigma,t,\varepsilon^2)+\cdots+f_N(\sigma,t,\varepsilon^N)+\cdots \tag{3.7}$$

其中

$$f_N=O(\varepsilon^N) \tag{3.8}$$

为了适应平均根数法中将摄动变化分解为长期项和周期项的需要，可利用第一章1.4中的方法，将$f_N(\sigma,t,\varepsilon^N)$，$N=1,2,\cdots$分解成相应的三个部分，即

$$f_N=f_{Nc}+f_{Nl}+f_{Ns}, \qquad N=1,2,\cdots \tag{3.9}$$

这里第二个下标"c"，"l"和"s"，各表示长期、长周期和短周期部分，即f_{Nc}只与a,e,i有关，f_{Nl}的周期取决于慢变量Ω和ω的变化，或是通约项(后面几章中会遇到)，f_{Ns}的周期则取决于快变量M。要使平均根数法有效，则要求

$$f_{1l}=0 \tag{3.10}$$

这在动力天文中是常被满足或近似满足的。

将形式解(3.3)代入方程(3.1)，右函数在$\bar{\sigma}(t)$展开，得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{\sigma}^{(0)}(t)+\sigma_1(t-t_0)+\sigma_2(t-t_0)+\cdots+\sigma_l^{(1)}(t)+\cdots+\sigma_s^{(1)}(t)+\cdots]\\
&=f_0(\bar{a})+\frac{\partial f_0}{\partial a}[a_l^{(1)}+a_l^{(2)}+\cdots+a_s^{(1)}+a_s^{(2)}+\cdots]\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}[a_l^{(1)}+\cdots+a_s^{(1)}+\cdots]^2+\cdots\\
&+f_1(\bar{\sigma},t,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}[\sigma_l^{(1)}+\cdots+\sigma_s^{(1)}+\cdots]_j\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}[\sigma_l^{(1)}+\cdots+\sigma_s^{(1)}+\cdots]_j[\sigma_l^{(1)}+\cdots+\sigma_s^{(1)}+\cdots]_k+\cdots\\
&+f_2(\bar{\sigma},t,\varepsilon^2)+\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_j}[\sigma_l^{(1)}+\cdots+\sigma_s^{(1)}+\cdots]_j+\cdots\\
&+\cdots+f_N(\bar{\sigma},t,\varepsilon^N)+\cdots
\end{aligned} \tag{3.11}$$

该式右端出现的根数 σ 均为参考解 $\bar{\sigma}(t)$。若级数(3.3)收敛，则比较展开式(3.11)两端同次幂(ε^N)的系数，并分别积分，得

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t)-\int_{t_0}^{t} f_0(\bar{a})\mathrm{d}t=\bar{\sigma}_0+\delta\bar{n}(t-t_0) \tag{3.12}$$

$$\sigma_1(t-t_0)=\int_{t_0}^{t}[f_{1c}]_\sigma \mathrm{d}t \tag{3.13}$$

$$\sigma_s^{(1)}(t)=\int^{t}[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(1)}+f_{1s}]_\sigma \mathrm{d}t \tag{3.14}$$

$$\sigma_2(t-t_0)=\int_{t_0}^{t}[\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_s^{(1)})_c^2+(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)}+\sigma_s^{(1)})_j)_c+f_{2c}]_\sigma \mathrm{d}t \tag{3.15}$$

$$\sigma_l^{(1)}(t)=\int^{t}[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_l^{(2)}+\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_s^{(1)})_l^2+(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)}+\sigma_s^{(1)})_j)_l+f_{2l}]_\sigma \mathrm{d}t \tag{3.16}$$

$$\sigma_s^{(2)}(t)=\int^{t}[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(2)}+\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_s^{(1)})_s^2+(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)}+\sigma_s^{(1)})_j)_s+f_{2s}]_\sigma \mathrm{d}t \tag{3.17}$$

……

上列各式右端被积函数中出现的$(A)_c$，$(A)_l$，$(A)_s$分别表示括号中函数 A 的长期、长周期和短周期部分。例如

$$A=\cos f+\cos(f+\omega)$$
$$=\cos f+\cos f\cos\omega-\sin f\sin\omega$$

利用第一章 1.4 中的方法，即可分解为

$$A=(A)_c+(A)_l+(A)_s$$
$$(A)_c=-e$$
$$(A)_l=-e\cos\omega$$
$$(A)_s=(\cos f+e)+(\cos f+e)\cos\omega-\sin f\sin\omega$$

容易证明，当 $f_{1l}=0$ 时，有 $a_l^{(1)}(t)=0$，详见下一段。因此，只要满足条件(3.10)，那么平均根数法对应的上述递推过程是有效的，即由低阶摄动求高阶摄动，但有几点要说明，即

(1)对于保守力摄动，a,e,i 的变化无长期项，那么在 Ω,ω,M 的摄动变化中，长期项将是$(t-t_0)$的线性函数，因为它们的长期项 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots$对应的被积函数都是 a,e,i 的函数，且积分时取 $\bar{a}=\bar{a}_0,\bar{e}=\bar{e}_0,\bar{i}=\bar{i}_0$。如果是耗散力，则解的结构要复杂些，例如长期项将不再是$(t-t_0)$的线性函数，但在一般情况下(即耗散力相对较小，是与 ε^2 同阶的二阶小量)，它不会影响级数解的构造。下面在类似问题中不再重复说明这一点。

(2)与经典摄动法不同，参考解 $\bar{\sigma}(t)$实际上是在递推过程中形成的，但它并不影响上述级数解的构造。例如，对于保守力摄动，有

$$\int\cos\bar{\omega}\mathrm{d}t=\frac{\sin\bar{\omega}}{(\omega_1+\omega_2+\cdots)}$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots$是 ω 变化的各阶长期项系数，它们都是 $\bar{a},\bar{e},\bar{i}$ 的函数，积分时不必知道它的具体形式，只是在导出结果后引用该公式计算时才可能用到。

(3)对于长周期项，其变化取决于慢变量 ω 和 Ω，例如 ω，因有

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0)+\cdots$$

其中 $\omega_1=O(\varepsilon)$是一阶小量，不像 M 的变化速度那么快，即

$$\bar{M}=\bar{M}_0+\bar{n}_0(t-t_0)+M_1(t-t_0)+\cdots$$

其中 $\bar{n}_0=O(\varepsilon^0)$。因此，若 $f_{2l}=\varepsilon^2\cos\omega$，将有

$$\int^t f_{2l}\mathrm{d}t=\int^t \varepsilon^2\cos\bar{\omega}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\varepsilon^2\sin\bar{\omega}}{(\omega_1+\cdots)}=A\sin\bar{\omega}$$

这里 $A=O(\varepsilon)$。积分结果给出的是一阶长周期项，而不是二阶长周期项，这就是长周期项积分的降阶现象，(3.16)式左端记为 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 即由此而来。实际上，在不太长的间隔内，$\sigma_l^{(1)}(t)$ 对应的 $\Delta\sigma_l^{(1)}=\sigma_l^{(1)}(t)-\sigma_l^{(1)}(t_0)$ 与二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$ 相当（后面有关章节中将会用到这一点），在经典摄动法中就是给出 $\sigma_2(t-t_0)$ 这样的结果，而在平均根数法中却以 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 的形式出现，它保持了周期项的本质，比较合理。由 f_{3l} 积分给出 $\sigma_l^{(2)}(t)$，依次类推。但这又引起另一问题，即由(3.16)式计算 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 时，右端被积函数中不仅用到 $\sigma_l^{(1)}(t)$，还用到 $a_l^{(2)}(t)$。关于这一点，如果仔细分析一下，即可知道，它并不影响解的构造，后面 3.3 中将要具体说明。

2. $a_l^{(1)}(t)=0$ **的证明**

考虑定常保守系统，它对应一定常 Hamilton 系统，对于非定常情况亦无妨，因总可以用正则扩充的办法化为定常系统。受摄二体问题对应的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}v^2-V \tag{3.18}$$

其中 V 包含中心天体的质点引力位和摄动位，由于摄动力是保守力，则有

$$V=\frac{\mu}{r}+R(r,\varepsilon) \tag{3.19}$$

$\mu=G(M+m)$，R 即相应的摄动位或摄动函数。对于受摄二体问题，活力积分仍成立，即

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \tag{3.20}$$

代入(3.18)式得

$$H=-\frac{\mu}{2a}-R \tag{3.21}$$

存在一积分（能量积分）

$$\frac{\mu}{2a}+R=C \tag{3.22}$$

该积分在参考解 $\bar{\sigma}(t)$ 展开，并将不同性质的项分开，有

$$\text{“常数项”：}\quad \frac{\mu}{2a}+(R_{1c}+R_{2c}+\cdots)+\cdots=C \tag{3.23}$$

$$\text{一阶长周期项：}\quad \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_l^{(1)}(t)]+R_{1l}=0 \tag{3.24}$$

$$\text{一阶短周期项：}\quad \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_s^{(1)}(t)]+R_{1s}=0 \tag{3.25}$$

……

由于 $f_{1l}=0$，而摄动运动方程的这一 f_{1l} 又是由 $\partial R_{1l}/\partial\sigma$ 形成的，那么必有 $R_{1l}=0$，因此

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\mu}{2a}\right)[a_l^{(1)}]=0$$

显然，$\frac{\partial}{\partial a}(\frac{\mu}{2a})\neq 0$，故证得

$$a_l^{(1)}(t)=0$$

3. **例**

这里仍用求解上一章中提出的含小参数的方程(2.74)作为一例，一则是为了让读者初步了解如何用平均根数法构造摄动解，同时也可与经典摄动法作一简单比较。方程为

$$\ddot{x}+\omega^2 x=-\varepsilon x^3$$

其中 $\varepsilon\ll 1,\omega>0$ 是实常数。上一章已给出无摄运动解，即

$$\left.\begin{aligned}&x=a\cos M\\&\dot{x}=-\omega a\sin M\\&M=M_0+\omega t\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

相应的摄动运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{a}=\frac{\varepsilon}{\omega}a^3(\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{8}\sin 4M)\\&\dot{M}=\omega+\frac{\varepsilon}{\omega}a^2(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2M+\frac{1}{8}\cos 4M)\end{aligned}\right\}\tag{3.27}$$

现用平均根数法解该方程，其形式改写成

$$\left.\begin{aligned}&\dot{a}=(f_{1s})_a\\&\dot{M}=(f_0)_M+(f_{1c})_M+(f_{1s})_M\end{aligned}\right\}\tag{3.28}$$

其中

$$(f_{1s})_a=\frac{\varepsilon}{\omega}a^3(\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{8}\sin 4M)\tag{3.29}$$

$$\left.\begin{aligned}&(f_0)_M=\omega=\text{const}\\&(f_{1c})_M=\frac{\varepsilon}{\omega}a^2(\frac{3}{8})\\&(f_{1s})_M=\frac{\varepsilon}{\omega}a^2(\frac{1}{2}\cos 2M+\frac{1}{8}\cos 4M)\end{aligned}\right\}\tag{3.30}$$

按平均根数法构造级数解的过程(3.12)～(3.17)式，首先有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}^{(0)}(t)=\bar{a}_0\\&\bar{M}^{(0)}(t)=\bar{M}_0+\omega(t-t_0)\end{aligned}\right\}\tag{3.31}$$

由此积分(3.13)和(3.14)式给出

$$\left.\begin{aligned}&a_1(t-t_0)=0\\&M_1(t-t_0)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}\bar{a}_0^2(\frac{3}{8})\omega(t-t_0)\end{aligned}\right\}\tag{3.32}$$

$$\left.\begin{aligned}&a_s^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)}\bar{a}_0^3(-\frac{1}{8}\cos 2\bar{M}-\frac{1}{32}\cos 4\bar{M})\\&M_s^{(1)}(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)}\bar{a}_0^2(\frac{1}{4}\sin 2M+\frac{1}{32}\sin 4M)\end{aligned}\right\}\tag{3.33}$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_2(t-t_0)&=\int_{t_0}^{t}\Big[\frac{\partial(f_{1s})_a}{\partial a}a_s^{(1)}+\frac{\partial(f_{1s})_a}{\partial M}M_s^{(1)}\Big]_c\mathrm{d}t=0\\
M_2(t-t_0)&=\int_{t_0}^{t}\Big[\frac{\partial(f_{1s})_M}{\partial a}a_s^{(1)}+\frac{\partial(f_{1s})_M}{\partial M}M_s^{(1)}\Big]_c\mathrm{d}t=\Big(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\bar{a}_0^2\Big)^2\Big(-\frac{51}{256}\Big)\omega(t-t_0)
\end{aligned}\right\}\tag{3.34}
$$

由于 $M_1/\omega=O(\varepsilon)$，那么 $a_s^{(1)}(t)$ 和 $M_s^{(1)}(t)$ 右端的分母 $\omega^2(1+M_1/\omega+\cdots)$，在准到一阶周期项时，可直接写成 ω^2。

从上列各阶摄动项的表达形式可以看出，解的结构比上一章摄动法给出的简单，而且不会出现形如(2.85)式的积分，即不会导致泊松项(或称混合项)的出现，解的形式为

$$
\left.\begin{aligned}
a(t)&=\bar{a}_0+a_s^{(1)}(t)+\cdots\\
M(t)&=\overline{M}_0+\omega(t-t_0)+(M_1+M_2+\cdots)(t-t_0)+M_s^{(1)}(t)+\cdots
\end{aligned}\right\}\tag{3.35}
$$

3.3 扁率摄动解

这一节将以中心天体的扁率摄动为背景，进一步阐述平均根数法构造小参数幂级数解的过程。扁率摄动是动力天文中常遇到的一种动力学现象。

考虑一运动天体 m(可看成质点)绕扁球形中心天体运动，坐标系的选择如下：原点即中心天体的质心，XY 平面为其赤道面，Z 轴即其自转轴方向，X 轴指向某一固定方向，如果中心天体是地球，则指向春分点方向。在此坐标系中，扁球形天体对运动天体 m 的引力加速度 $\boldsymbol{F}$，可由引力位 $V(\boldsymbol{r})$的梯度来表达，即

$$
\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}V(\boldsymbol{r})\tag{3.36}
$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为运动天体的位置矢量。引力位的具体表达式取决于该中心天体的形状和质量分布，对大部分天体，一个很好的扁球近似有如下的表达式：

$$
V(\boldsymbol{r})=\frac{GM}{r}\Big[1-J_2\Big(\frac{a_e}{r}\Big)^2P_2(\sin\varphi)\Big]\tag{3.37}
$$

其中 M 和 a_e 分别为中心天体的总质量和赤道半径；r 和 φ 是运动天体的向径和纬度；$P_2(\sin\varphi)$ 是二阶勒让德(Legendre)多项式，有

$$
P_2(\sin\varphi)=\frac{3}{2}sin^3\varphi-\frac{1}{2}\tag{3.38}
$$

J_2 为一常数，其大小即反应该中心天体对均匀球体的偏离程度，通常它与中心天体的几何扁率同量级，因此 J_2 就是摄动小参数 ε，在太阳系中有

地球：$J_2=O(10^{-3})$

月球：$J_2=O(10^{-4})$

太阳：$J_2=O(10^{-5}\sim10^{-6})$

木星：$J_2=O(10^{-2})$

如果采用中心天体的质量 M 和赤道半径 a_e 分别作为质量和长度单位，时间单位取为 $(a_e^3/GM)^{1/2}$，则引力常数 $G=1$。那么(3.37)式可写成下列形式：

$$
V(\boldsymbol{r})=V_0+V_1\tag{3.39}
$$

其中

$$
V_0=\frac{1}{r}\tag{3.40}
$$

$$V_1 = -\frac{J_3}{r_3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) \tag{3.41}$$

这里的 V_1 就是摄动函数 R，相应的摄动加速度 $\boldsymbol{F}_1$ 即

$$\boldsymbol{F}_1 = \mathrm{grad}R$$

显然，这一受摄系统对应的是一定常系统，便于阐明平均根数法构造摄动解的过程。

1. 摄动函数 R 的分解

由球面三角公式给出

$$\sin\varphi = \sin i \sin(f+\omega) \tag{3.42}$$

代入(3.41)式得

$$R = \frac{J_2}{2a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right) + \frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right] \tag{3.43}$$

根据第一章 1.4 中求平均值的方法可给出

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = (1-e^2)^{-3/2} \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f} = 0 \\
&\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

由此，R 可分解成长期和周期两个部分 R_{1c} 和 R_{1s}，即

$$R = R_{1c} + R_{1s} \tag{3.45}$$

$$R_{1c} = \frac{J_2}{2a^3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)(1-e^2)^{-3/2} \tag{3.46}$$

$$R_{1s} = \frac{J_2}{2a^3}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3 - (1-e^2)^{-3/2}\right] + \frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\} \tag{3.47}$$

2. 摄动运动方程

将 R 的表达式代入($\partial R/\partial\sigma$)型的摄动运动方程(2.31)给出

$$\dot{\sigma} = f_0(a) + f_{1c}(a,e,i) + f_{1s}(a,e,i,\omega,M) \tag{3.48}$$

$$\left.\begin{aligned}
&f_0(a) = \delta n, \qquad n = a^{-3/2} \\
&\delta = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T
\end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

这里 σ 仍为轨道根数，即

$$\sigma = (a\ \ e\ \ i\ \ \Omega\ \ \omega\ \ M)^T \tag{3.50}$$

f_{1c} 和 f_{1s} 的具体形式如下：

$$(f_{1c})_a = 0 \tag{3.51}$$

$$(f_{1c})_e = 0 \tag{3.52}$$

$$(f_{1c})_i = 0 \tag{3.53}$$

$$(f_{1c})_\Omega = -\frac{3J_2}{2p^2}n\cos i \tag{3.54}$$

$$(f_{1c})_\omega=\frac{3J_2}{2p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right) \tag{3.55}$$

$$(f_{1c})_M=\frac{3J_2}{2p^2}n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}(f_{1s})_a=&\frac{3J_2}{a}n\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\Big\{-\frac{e\sin f}{1-e^2}\\&\times\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right]-\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)\Big\}\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}(f_{1s})_e=&\frac{3J_2}{2a^2e}n\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4\Big\{-e\sin f\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2(f+\omega)\right]\\&-(1-e^2)\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)\sin 2(f+\omega)+\sin^2 i\left(\frac{r}{a}\right)\sin 2(f+\omega)\Big\}\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$(f_{1s})_i=-\frac{3J_2}{2a^2\sqrt{1-e^2}}n\sin i\cos i\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2(f+\omega) \tag{3.59}$$

$$(f_{1s})_\Omega=-\frac{3J_2}{2a^2\sqrt{1-e^2}}n\cos i\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]-\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}(f_{1s})_\omega=&\frac{3J_2}{2a^2\sqrt{1-e^2}}n\cos^2 i\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]-\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}\\&+\frac{3J_2}{2a^2e}n\sqrt{1-e^2}\Big\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-e(1-e^2)^{-5/2}\right]+\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos 2(f+\omega)\\&-\frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^3(2+e\cos f)\sin f\sin 2(f+\omega)\Big\}\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}(f_{1s})_M=&\left(-\frac{3n}{2a}\right)a_s^{(1)}(t)+\frac{3J_2}{a^2}n\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}\\&-\frac{3J_2}{2a^2e}n(1-e^2)\Big\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f-e(1-e^2)^{-5/2}\right]+\frac{3}{2}\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^4\cos f\cos 2(f+\omega)\\&-\frac{\sin^2 i}{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^3(2+e\cos f)\sin f\sin 2(f+\omega)\Big\}\end{aligned} \tag{3.62}$$

3. 摄动解

由于 $R_{1l}=0$，有

$$f_{1l}=0$$

因此满足条件(3.10)，平均根数法可以有效地构造如下表达式的小参数幂级数解：

$$\sigma(t)=\bar{\sigma}_0+\delta\bar{n}(t-t_0)+(\sigma_1+\sigma_2+\cdots)(t-t_0)+\sigma_l^{(1)}(t)+\sigma_s^{(1)}(t)+\cdots \tag{3.63}$$

由(3.13)式给出一阶长期项如下：

$$\left.\begin{aligned}a_1(t-t_0)&=0\\e_1(t-t_0)&=0\\i_1(t-t_0)&=0\end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

$$\Omega_1(t-t_0)=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i n(t-t_0) \tag{3.65}$$

$$\omega_1(t-t_0)=\frac{3J_2}{2p^2}(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)n(t-t_0) \tag{3.66}$$

$$M_1(t-t_0)=\frac{3J_2}{2p^2}(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)\sqrt{1-e^2}n(t-t_0) \tag{3.67}$$

其中 $p=a(1-e^2)$。上列各式右端出现的根数 a,e,i 均为平均根数，有

$$a=a_0,\quad \bar{e}=\bar{e}_0,\quad \bar{i}=\bar{i}_0$$

由(3.14)式给出一阶短周期项如下：

$$a_s^{(1)}(t)=\int^t\frac{2}{na}\frac{\partial R_{1s}}{\partial M}\mathrm{d}t=\int^t\frac{2}{na}\frac{\partial R_{1s}}{\partial M}\frac{\mathrm{d}M}{n}=\frac{2}{n^2a}R_{1s}$$
$$=\frac{J_2}{a}\{(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)[(\frac{a}{r})^3-(1-e^2)^{-3/2}]+\frac{3}{2}\sin^2 i(\frac{a}{r})^3\cos2(f+\omega)\} \tag{3.68}$$

$$e_s^{(1)}(t)=\int^t(f_{1s})_e\mathrm{d}t=\int^t(f_{1s})_e\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}(\frac{r}{a})^2\mathrm{d}f$$
$$=\frac{J_2}{2a^2}(\frac{1-e^2}{e})\{(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)[(\frac{a}{r})^3-(1-e^2)^{-3/2}]+\frac{3}{2}\sin^2 i(\frac{a}{r})^3\cos2(f+\omega)$$
$$-\frac{3}{2}\sin^2 i(1-e^2)^{-2}[e\cos(f+2\omega)+\cos(2f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)]\} \tag{3.69}$$

$$i_s^{(1)}(t)=\int^t(f_{1s})_i\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3J_2}{8p^2}\sin2i[e\cos(f+2\omega)+\cos(2f+2\omega)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega)] \tag{3.70}$$

$$\Omega_s^{(1)}(t)=\int^t(f_{1s})_\Omega\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\{(f-M+e\sin f)-\frac{1}{2}[e\sin(f+2\omega)+\sin(2f+2\omega)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega)]\} \tag{3.71}$$

$$\omega_s^{(1)}(t)=\int^t(f_{1s})_\omega\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3J_2}{2p^2}\{(2-\frac{5}{2}\sin^2 i(f-M+e\sin f)+(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)[(\frac{1}{e}-\frac{e}{4})\sin f+\frac{1}{2}\sin2f+\frac{e}{12}\sin3f]$$
$$-[\frac{1}{4e}\sin^2 i+(\frac{1}{2}-\frac{15}{16}\sin^2 i)e]\sin(f+2\omega)-(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\sin^2 i)\sin(2f+2\omega)$$
$$+[\frac{7}{12e}\sin^2 i-(\frac{1}{6}-\frac{19}{48}\sin^2 i)e]\sin(3f+2\omega)+\frac{3}{8}\sin^2 i\sin(4f+2\omega)$$
$$+\frac{e}{16}\sin^2 i[\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega)]\} \tag{3.72}$$

$$M_s^{(1)}(t)=\int^t[\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(1)}(t)+(f_{1s})_M]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3J_2}{2p^2}\sqrt{1-e^2}\{-(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)[(\frac{1}{e}-\frac{e}{4})\sin f+\frac{1}{2}\sin2f+\frac{e}{12}\sin3f]$$
$$+\sin^2 i[(\frac{1}{4e}+\frac{5}{16}e)\sin(f+2\omega)-(\frac{7}{12e}-\frac{e}{48})\sin(3f+2\omega)$$
$$-\frac{3}{8}\sin(4f+2\omega)-\frac{e}{16}(\sin(5f+2\omega)+\sin(f-2\omega))]\} \tag{3.73}$$

上列各式中出现的轨道根数 σ，同样应为平均根数 $\bar{\sigma}(t)$，其中

$$\bar{\omega}(t) = \bar{\omega}_0 + (\omega_1 + \omega_2 + \cdots)(t - t_0)$$
$$\bar{M}(t) = \bar{M}_0 + (\bar{n} + M_1 + M_2 + \cdots)(t - t_0)$$

计算时将要用到这些表达式。若考虑弧段 $n(t - t_0) = O(1/J_2)$，那么 $\sigma_1(t - t_0) = O(\varepsilon^0)$，在准到一阶摄动项的精度要求下，上列各式中的 $\bar{\sigma}(t)$ 只需取如下形式：

$$\bar{a} = \bar{a}_0, \quad \bar{e} = \bar{e}_0, \quad \bar{i} = \bar{i}_0$$
$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \omega_1(t - t_0)$$
$$\bar{M} = \bar{M} + (\bar{n}_0 + M_1)(t - t_0)$$

而且 $\bar{\sigma}_0$ 亦可用 σ_0 代替。不过，在积分 $\int^t f_{1c}\mathrm{d}t$ 的过程中，可按二体问题的微分关系处理，即 $\bar{\omega} = \mathrm{const}$，和

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}M}{n} = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{d}f$$

这样在积分中丢掉的是 $J_2(M_1/\bar{n})$ 和 $J_2(\omega_1/\bar{n})$ 这类项，即 $O(J_2^2)$ 项，这显然是允许的，在上面的推导过程中就是这样处理的。但是，若问题的精度需要准到二阶摄动项，那么上述处理就不再允许，这将给积分带来一些麻烦，不仅涉及到关系式 $\frac{\mathrm{d}\bar{M}}{\mathrm{d}t} = \bar{n} + M_1$，而且被积函数 f_{1c} 必须展成 M 的三角级数，从而变成时间 t 的显函数，否则真近点角 f 与 ω 同时出现在三角函数的幅角中，无法积分。展成 M 的三角级数后，相应的扁率摄动解对 e 不再是"封闭"的，这当然是一缺陷。关于该问题，用后面第七章中介绍的各种变换方法可以避免这一点。

计算二阶长期项的(3.15)式变为

$$\sigma_2(t - t_0) = \int_{t_0}^{t}\left[\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_s^{(1)})_c^2 + \left(\sum_j\frac{\partial f_{1s}}{\partial\sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j\right)_c\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t$$

原式中的

$$\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)} + \sigma_s^{(1)})_j, \qquad \sum_j\frac{\partial f_{1s}}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)})_j$$

对长期项无贡献。略去具体推导过程，直接给出结果如下：

$$\left.\begin{aligned} a_2(t-t_0) &= 0 \\ e_2(t-t_0) &= 0 \\ i_2(t-t_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.74}$$

$$\Omega_2(t-t_0) = -\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2\cos i\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}\right)-\sin^2 i\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\right]n(t-t_0) \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}\omega_2(t-t_0) = {} & \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\left[\left(4+\frac{7}{12}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\sin^2 i\left(\frac{103}{12}+\frac{3}{8}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\right. \\ & \left.+\sin^4 i\left(\frac{215}{48}-\frac{15}{32}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\right]n(t-t_0)\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}M_2(t-t_0) = {} & \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)^2\sqrt{1-e^2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}+\left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}e^2\right)\right. \\ & -\sin^2 i\left(\frac{19}{3}+\frac{26}{3}e^2\right)+\sin^4 i\left(\frac{233}{48}+\frac{103}{12}e^2\right) \\ & \left.+\frac{e^4}{1-e^2}\left(\frac{35}{12}-\frac{35}{4}\sin^2 i+\frac{315}{32}\sin^4 i\right)\right]n(t-t_0)\end{aligned} \tag{3.77}$$

计算一阶长周期项 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 的(3.16)式变为

$$\sigma_l^{(1)}(t)=\int^t[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_l^{(2)}+\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_s^{(1)})_l^2+\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)})_j+(\sum_j\frac{\partial f_{1s}}{\partial\sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_l]_0\mathrm{d}t$$

原式中的

$$\sum_j\frac{\partial f_{1s}}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)})_j$$

对一阶长周期项无贡献。上一节已证明

$$a_l^{(1)}(t)=0 \tag{3.78}$$

略去推导过程，直接给出另五个根数的一阶长周期项如下：

$$e_l^{(1)}(t)=-(\frac{1-e^2}{e}\mathrm{tg}i)i_l^{(1)}(t) \tag{3.79}$$

$$i_l^{(1)}(t)=-(\frac{3J_2}{2p^2})\frac{\sin 2i}{(4-5\sin^2 i)}(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i)e^2\cos 2\omega \tag{3.80}$$

$$\Omega_l^{(1)}(t)=-(\frac{3J_2}{2p^2})\frac{\cos i}{(4-5\sin^2 i)^2}(\frac{7}{3}-5\sin^2 i+\frac{25}{8}\sin^4 i)e^2\sin 2\omega \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}\omega_l^{(1)}(t)=&-(\frac{3J_2}{2p^2})\frac{1}{(4-5\sin^2 i)^2}[\sin^2 i(\frac{25}{3}-\frac{245}{12}\sin^2 i+\frac{25}{2}\sin^4 i)\\&-e^2(\frac{7}{3}-\frac{17}{2}\sin^2 i+\frac{65}{6}\sin^4 i-\frac{75}{16}\sin^6 i)]\sin 2\omega\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}M_l^{(1)}(t)=&(\frac{3J_2}{2p^2})\frac{\sin^2 i}{(4-5\sin^2 i)^2}\sqrt{1-e^2}[(\frac{25}{3}-\frac{245}{12}\sin^2 i+\frac{25}{2}\sin^4 i)\\&-e^2(4-5\sin^2 i)(\frac{7}{12}-\frac{5}{8}\sin^2 i)]\sin 2\omega\end{aligned} \tag{3.83}$$

若用符号 c,l,s 分别表示仅与 a,e,i 有关的项，长周期项和短周期项，那么在推导上述 $\sigma_2(t-t_0)$ 和 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 时，要注意到一种运算规律，即

$$\begin{aligned}c\cdot c\to c,\quad c\cdot l\to l,\quad &c\cdot s\to s\\ l\cdot l\to c,\quad &l\cdot s\to s\\ &s\cdot s\to c,\quad l,\quad s\end{aligned}$$

例如：

$$\begin{aligned}A-\sin f\cdot\sin f-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2f\\=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\overline{\cos 2f})-(\frac{1}{2}\cos 2f-\frac{1}{2}\overline{\cos 2f})=(A)_c+(A)_s\end{aligned}$$

即 $s\cdot s\to c+s$。根据这一规律可知，利用(3.16)式计算 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 时，右端被积函数中只有下列一项

$$\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma}(\sigma_l^{(1)})_j$$

涉及到未知的 $\sigma_l^{(1)}(t)$，而这一项又有一个特点，即 $f_{1c}=f_{1c}(a,e,i)$，在首先推导 $a_l^{(1)}(t),e_l^{(1)}(t)$ 和 $i_l^{(1)}(t)$ 时，它们对应的 $f_{1c}=0$，故没有问题，再往下推导 $\Omega_l^{(1)}(t),\omega_l^{(1)}(t)$ 和 $M_l^{(1)}(t)$ 时，因 f_{1c} 的特性，只涉及到 $a_l^{(1)}(t),e_l^{(1)}(t)$ 和 $i_l^{(1)}(t)$，这已无问题。至于推导 $M_l^{(1)}(t)$ 还要用到 $a_l^{(2)}(t)$ 的问题，亦无实质性困难，如果仍用上述推导过程，只是增加一些麻烦而已，$a_l^{(2)}(t)$ 仍可导出，它只涉及到低阶摄动项，不会出现问题。不过，可以像上一节证明 $a_l^{(1)}(t)=0$ 那样，仍以 $\bar{\sigma}(t)$ 作为参考解，利用能量积分便可简单地推出 $a_l^{(2)}(t)$，具体结果如下[2]：

$$a_l^{(2)}(t)=(\frac{3J_2}{2p^2})^2 a\ \sqrt{1-e^2}\{[-\frac{1}{6}\sin^2 i(4-5\sin^2 i)\overline{\cos 2f}+e^2\sin^2 i(\frac{17}{12}-\frac{19}{8}\sin^2 i)]\cos 2\omega$$

$$+\frac{e^4}{1-e^2}[\frac{7}{3}\sin^2 i(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)\cos 2\omega+\frac{1}{32}\sin^4 i\cos 4\omega]\} \tag{3.84}$$

其中

$$\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\ \sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2 \tag{3.85}$$

计算二阶短周期项(3.17)式比较复杂些，即

$$\sigma_s^{(2)}(t)=\int^t[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(2)}+\delta\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial a^2}(a_s^{(1)})_s^2+(\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j+\sum_j\frac{\partial f_{1s}}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)}+\sigma_s^{(1)})_j)_s]_0 dt \tag{3.86}$$

除计算 $\sigma_s^{(1)}(t)$时提出的几个问题外，这里计算 $\sigma_l^{(2)}(t)$不会出现新问题。

到此，已能看清采用平均根数法构造小参数幂级数解的具体过程及其有关问题。这一方法显然有其优点，它已被广泛地采用。

对一个具体问题，在一定精度要求下，相应的幂级数解只需取到足够多项即可，通常只用到一阶解或二阶解。高阶解太复杂，要导出完整的表达式太困难，即使采用计算机推导，亦有很多限制，故对于高精度要求，往往采用数值解法。至于一阶解、二阶解的提法，在不同问题中有些差别。由于长期项随计算弧段的增长而增大，正如前而所说的，当 $n(t-t_0)=O(1/J_2)$时，$\sigma_1(t-t_0)=O(1)$，它已变为零阶项。故通常有下述提法，即

一阶摄动解(简称一阶解)：取到所有的一阶摄动项(包括长期、长周期和短周期项)和二阶长期项。

二阶摄动解(简称二阶解)：取到所有的一、二阶摄动项和三阶长期项。

4. 扁率摄动的力学图像

由(3.37)式表达的扁球引力位，实际上是反映了一个旋转椭球引力位的主要部分。既然是旋转对称的，故对运动天体轨道的影响与中心天体的旋转无关，与该天体轨道面在空间的“定向”(指 Ω)亦无关。再由 J_2 项摄动的一阶解可以清楚地看出运动天体轨道的变化规律，即其轨道基本上是一个旋转椭圆：轨道面和拱线在旋转，而且旋转规律很清楚，简叙如下。

(1)Ω 的变化，相应的变化率 $\dot{\Omega}$ 为

$$\dot{\Omega}=\Omega_1=-\frac{3J_2}{2p^2}n\cos i$$

当 $0<i<90°$时，$\dot{\Omega}<0$，轨道面西退；当 $90°<i<180°$时，$\dot{\Omega}>0$，轨道而东进；而当 $i=90°$时，即极轨道，其轨道面不变。同时考虑二阶长期摄动项时，这些规律仍保持，请看公式(3.76)。

(2)ω 的变化，变化率 $\dot{\omega}$ 为

$$\dot{\omega}=\omega_1=\frac{3J_2}{2p^2}n(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)$$

当 $i=63°26'$ 或 $116°34'$时，有

$$2-\frac{5}{2}\sin^2 i=0$$

这一倾角称为临界倾角，常记为 i_c。当 $0<i<63°26'$ 或 $116°34<i<180°$ 时，拱线转动沿天体运动方向，反之则沿天体运动的反方向。而当 $i=i_c$ 时，拱线不动，但在实际运动中到底如何？后面第六章中要进一步讨论，它涉及到一种通约问题引起的轨道共振。

5. 计算单位问题

为了公式表达和量级估计方便，前面采用了使 $\mu=GM=1$ 的计算单位，这实际上是一个无量纲化的过程。若为了某种需要，想改用其它计算单位，这是不困难的。单纯从计算而言，只要将已导出的公式中出现的长度、质量和时间量分别乘上原采用的中心天体的赤道半径 a_e、质量 M 和相应的时间单位，即可还原成原有量纲的形式。如果需要将公式还原成原量纲的形式，亦很简单，只要按无量纲量与有量纲量之间的关系转换即可。若分别用 A 和 $\overline{A}$ 表示无量纲量和有量纲量，相应的无量纲量"尺度"记作 α，那么有

$$A=\overline{A}/\alpha$$

以前面导出的 Ω_1 和 $a_s^{(1)}(t)$ 为例，还原成原量纲的形式即

$$\Omega_1=-\frac{3a_e^2J_2}{2p^2}n\cos i \tag{3.87}$$

$$a_s^{(1)}(t)=\frac{a_e J_2}{a}\{(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)[(\frac{a}{r})^3-(1-e^2)^{-3/2}]+\frac{3}{2}\sin^2 i(\frac{a}{r})^3\cos 2(f+\omega)\} \tag{3.88}$$

其中 n 应由 $a^{-3/2}$ 还原成 $\sqrt{\mu}a^{-3/2}$，a 已变为有量纲量，与 a_e 的单位相同，Ω_1 与 n 的量纲均为（弧度/时间），因 r 与 a 的单位一致，故 $(\frac{a}{r})$ 仍为无量纲量。

参 考 文 献

[1] Kozai, Y., *Astron. J.*, 64(1959), 367～377.

[2] 刘 林，《人造地球卫星轨道力学》，高等教育出版社，1992。

第四章　天体运动中常见的几种摄动

4.1　非球形引力位引起的形状摄动

对于非球形中心天体，上一章最后一节曾采用了一个最简单的模型——扁球体近似，主要是为了介绍平均根数法构造相应摄动解的具体过程，而在一般情况下，非球形引力位却是一个无穷级数。这一引力位通常是在星固坐标系 $O-XYZ$ 中给出的，坐标原点是非球形天体的质心，XY 坐标面为其赤道面，X 轴方向为中心天体的某一子午线方向，Z 轴为其自转轴方向(即垂直赤道面)。如果中心天体是地球，则 X 轴方向即格林威治子午线方向。若略去中心天体的岁差章动和极移，则该坐标系与讨论小天体绕中心天体运动相应的天球坐标系 $O-xyz$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{R}=R_z(S)\boldsymbol{r} \tag{4.1}$$

$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 即同一空间点在两种坐标系中的位置矢量。式中 $R_z(S)$ 为旋转矩阵，$S(t)$ 相当于 X 轴方向的地方"恒星时"，有

$$S(t)=S_0+n_e(t-t_0) \tag{4.2}$$

S_0 对应 t_0，n_e 是中心天体的自转角速度。在星固坐标系中，非球形中心天体的引力位为

$$V=\frac{\mu}{r}\{1+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(\frac{a_e}{r})^l P_{lm}(\sin\varphi)[C_{lm}\cos m\lambda+S_{lm}\sin m\lambda]\} \tag{4.3}$$

其中

$\mu\equiv GM$，是中心天体的引力常数，G 是万有引力常数，M 是中心天体的质量。

$a_e\equiv$中心天体参考椭球体的赤道半径。

$r,\varphi,\lambda\equiv$星固坐标系中空间点的向径、纬度和经度。

$P_{lm}\equiv l$ 次 m 阶缔合勒让德多项式，$m=0$ 对应简单的勒让德多项式，记作 P_l。

$C_{lm},S_{lm}\equiv l$ 次 m 阶谐系数。

$P_{lm}(x)$和 $P_l(x)$的表达式如下：

$$P_{lm}(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \tag{4.4}$$

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}[(x^2-1)^l] \tag{4.5}$$

显然，引力位表达式(4.3)右端括号中的第二大项是对均匀球体的修正，它反应了真实引力位对球形引力位的偏离程度，相应的谐系数 C_{lm} 和 S_{lm} 即这种偏离程度的具体度量，其中 C_{20} 就是

上一章(3.37)式中的($-J_2$)。

按不同的性质,(4.3)式可写成下列形式[1]:

$$V=\frac{\mu}{r}\{1+\sum_{l=2}^{\infty}(\frac{a_e}{r})^l C_{l0}P_l(\sin\varphi)+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}(\frac{a_e}{r})^l P_{lm}(\sin\varphi)[C_{lm}\cos m\lambda+S_{lm}\sin m\lambda]\} \quad (4.6)$$

该式右端括号内的第二和第三大项分别称为带谐(Zonal harmonic)项和田谐(Tesseral harmonic)项。通常,C_{20},C_{22}和S_{22}是主要的修正项,相当于一个三轴椭球体,有

$$V=\frac{\mu}{r}[1+C_{20}(\frac{a_e}{r})^2P_2(\sin\varphi)+(\frac{a_e}{r})^2P_{22}(\sin\varphi)(C_{22}\cos2\lambda+S_{22}\sin2\lambda)] \quad (4.7)$$

习惯上采用下述符号:

$$\left.\begin{aligned}J_2&=-C_{20}\\J_{22}&=-(C_{22}^2+S_{22}^2)^{1/2}\end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

相应的表达式(4.7)又可简化成下列形式:

$$V=\frac{\mu}{r}[1-J_2(\frac{a_e}{r})^2P_2(\sin\varphi)-J_{22}(\frac{a_e}{r})^2P_{22}(\sin\varphi)\cos2\bar{\lambda}] \quad (4.9)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\bar{\lambda}&=\lambda-\lambda_{22}\\2\lambda_{22}&=\mathrm{tg}^{-1}(S_{22}/C_{22})\end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

这就以常数J_{22}和λ_{22}代替了谐系数C_{22}和S_{22},经度$\bar{\lambda}$的起量点移至$\bar{X}$,此方向对应经度$\lambda=\lambda_{22}$。

这一节就是讨论小天体在(4.9)式表达的引力位对应的非球形引力场中的运动,J_2项摄动主要是反映非球形引力位的扁率效应,这在上一章中已有详细阐述,而J_{22}项对运动天体轨道的影响则是反映赤道椭率的摄动效应。

1. 非球形引力位对应的摄动函数及其根数表达式

由(4.9)式可知,摄动函数R即

$$R=R_2+R_{22} \quad (4.11)$$

$$R_2=-J_2(\frac{\mu a_e^2}{r^3})P_2(\sin\varphi) \quad (4.12)$$

$$R_{22}=-J_{22}(\frac{\mu a_e^2}{r^3})P_{22}(\sin\varphi)\cos2\bar{\lambda} \quad (4.13)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}P_2(\sin\varphi)&=\frac{3}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\\P_{22}(\sin\varphi)&=3\cos^2\varphi\end{aligned}\right\} \quad (4.14)$$

见图4.1,有

$$\left.\begin{aligned}\bar{\lambda}&=\Omega_e+\theta\\\Omega_e&=\Omega-S(t)=(\Omega-S_0)-n_e(t-t_0)\end{aligned}\right\} \quad (4.15)$$

由球面三角公式

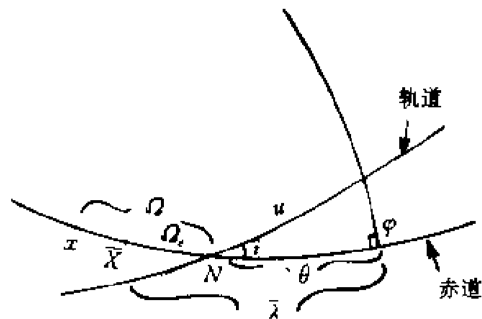


图4.1 星固坐标系和"惯性"坐标系

$$\left.\begin{aligned}&\sin\varphi=\sin u\sin i\\&\cos\varphi\cos\theta=\cos u,\quad u=f+\omega\\&\cos\varphi\sin\theta=\sin u\cos i\end{aligned}\right\}\tag{4.16}$$

即可将摄动函数 R_2 和 R_{22} 用运动天体的轨道根数来表达，其形式为

$$R_2=\frac{\mu a_e^2}{2a^3}J_2\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)+\frac{3}{2}\sin^2 i\cos 2u\right]\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}R_{22}=\frac{3\mu a_e^2}{4a^3}(-J_{22})\left(\frac{a}{r}\right)^3[&(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e)\\&+(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e)+2\sin^2 i\cos 2\Omega_e]\end{aligned}\tag{4.18}$$

R_2 在上一章中已讨论过，不仅不显含 t，亦与 Ω 无关。这是所有带谐项 $\sum\limits_{l\geqslant 2}C_{l0}\left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_l(\sin\varphi)$ 的共同特征，它们描述的引力位具有旋转对称的特点。而 R_{22} 则既显含 t 亦与 Ω 有关，这也是所有田谐项的特征，它们描述的引力位不具备任何对称性。因此，只要将 J_2 和 J_{22} 项对运动天体的摄动影响讨论清楚，那么就能了解全部带谐项和田谐项对运动天体的摄动效应，而且采用摄动法或改进的摄动法（即平均根数法）构造相应摄动解的过程亦是如此，只需讨论 J_2 和 J_{22} 项即可了解其它带谐项和田谐项摄动解的构造轮廓。

2. 摄动函数 R 的分解

对于大多数天体，如地球、木星等，非球形引力位的主要修正项就是 J_2 项，而其它修正项都较小，如果 J_2 看作一阶小量，则其它谐系数可以认为是二阶小量。即使对于慢自转天体，不完全符合这一情况，暂作上述假定，也不影响讨论。关于 J_2 部分的 R_2，在上一章中已作了分解，见(3.45)～(3.47)式。但对于 J_{22} 部分的 R_{22}，却有其复杂性，它将涉及到中心天体自转速率（即 n_e）的大小，下面分两种情况考虑。

(1)慢自转情况。例如金星的自转比公转还慢些，而月球的自转速率与公转速率几乎相等。这类中心天体的自转速率要比绕其运行的卫星平运动速度 n 小得多。在此情况下，可以认为 Ω_e 中包含的自转量 $S(t)=S_0+n_e(t-t_0)$ 亦是慢变量。于是与对 R_2 的处理方法相同，由 $\left(\frac{a}{r}\right)^3$、$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2f$ 和 $\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2f$ 的平均值可将 R_{22} 分解为

$$R_{22}=R_{2l}+R_{2s}\tag{4.19}$$

$$R_{2l}=\frac{3\mu a_e^2}{4a^3}(-J_{22})(2\sin^2 i\cos 2\Omega_e)(1-e^2)^{-3/2}\tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}R_{2s}=\frac{3\mu a_e^2}{4a^3}(-J_{22})\Big\{&\left(\frac{a}{r}\right)^3[(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e)+(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e)]\\&+2\sin^2 i\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]\cos 2\Omega_e\Big\}\end{aligned}\tag{4.21}$$

(2)快自转情况。地球、火星和木星等天体就属于这种情况，例如地球自转周期是一个恒星日，而近地卫星一天也只绕地球转 10 多圈，24^h 地球同步卫星一天只转一圈。因此相应的中心天体自转速率与绕其运行的卫星平运动速度 n 接近，或几乎相等，故 Ω_e 中包含的自转量 $S(t)$ 也应看作快变量。于是 R_{22} 中只有一种项，即短周期项，有

$$R_{22}=R_{2s}\tag{4.22}$$

3. 中心天体慢自转情况下的摄动解

将分解后的 J_2 和 J_{22}项摄动函数代入摄动运动方程后，有

$$\dot{\sigma}=f_0(a)+f_1(\sigma;J_2)+f_2(\sigma,t;J_{22}) \tag{4.23}$$

其中 J_2 部分

$$f_1(\sigma;J_2)=f_{1c}(a,e,i)+f_{1s}(a,e,i,\omega,M)$$

的具体形式在上一章中已列出。而 J_{22}部分 f_2 则包含两种项，即

$$f_2=f_{2l}+f_{2s} \tag{4.24}$$

f_{2l}的具体形式如下：

$$(f_{2l})_a=0 \tag{4.25}$$

$$(f_{2l})_e=0 \tag{4.26}$$

$$(f_{2l})_i=(\frac{3a_e^2J_{22}}{p^2})n\sin i\sin 2\Omega_e \tag{4.27}$$

$$(f_{2l})_\Omega=-(\frac{3a_e^2J_{22}}{p^2})n\cos i\cos 2\Omega_e \tag{4.28}$$

$$(f_{2l})_\omega=(\frac{3a_e^2J_{22}}{p^2})n(1-\frac{5}{2}\sin^2 i)\cos 2\Omega_e \tag{4.29}$$

$$(f_{2l})_M=(\frac{3a_e^2J_{22}}{p^2})n(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)\sqrt{1-e^2}\cos 2\Omega_e \tag{4.30}$$

其中 $p=a(1-e^2)$。f_{2s}涉及到 $\partial R_{2s}/\partial\sigma$，有

$$(f_{2s})_a=\frac{2}{na}\frac{\partial R_{2s}}{\partial M} \tag{4.31}$$

$$(f_{2s})_e=(\frac{1-e^2}{2ae})(f_{2s})_a-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}(\frac{\partial R_{2s}}{\partial\omega}) \tag{4.32}$$

$$(f_{2s})_i=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}(\cos i\frac{\partial R_{2s}}{\partial\omega}-\frac{\partial R_{2s}}{\partial\Omega}) \tag{4.33}$$

$$(f_{2s})_\Omega=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}(\frac{\partial R_{2s}}{\partial i}) \tag{4.34}$$

$$(f_{2s})_\omega=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}(\frac{\partial R_{2s}}{\partial e})-\cos i(f_{2s})_\Omega \tag{4.35}$$

$$(f_{2s})_M=\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(2)}(t)-\sqrt{1-e^2}(\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R_{2s}}{\partial e})-\frac{2}{na}(\frac{\partial R_{2s}}{\partial a}) \tag{4.36}$$

有了 f_{2l}和 f_{2s}，采用上一章介绍的平均根数法，即可构造相应的摄动解。仅与 J_2 有关的摄动项不再列出，下面只给出与 J_{22}有关的摄动项，它涉及到下列积分：

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_l^{(1)}(t)=\int^t[f_{2l}+\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_j^{(1)})_s]_0 dt\\
&\sigma_s^{(2)}(t)=\int^t[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(2)}(t)+f_{2s}]_0 dt\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

积分 $\sigma_l^{(1)}(t)$时，用到 J_2 部分的 f_{1c}，见上一章公式(3.51)～(3.56)，但对 J_{22}项摄动而言，由于$(f_{2l})_a=0$，$(f_{2l})_e=0$，故只需考虑与 f_{1c}有关的一项，即

$$\frac{\partial f_{1s}}{\partial i} i_l^{(1)}(t)$$

积分后得

$$a_l^{(1)}(t)=0 \tag{4.38}$$

$$e_l^{(1)}(t)=0 \tag{4.39}$$

$$i_l^{(1)}(t)=\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{2p^2}\right) n\sin i\cos 2\Omega_e/\dot{\Omega}_e \tag{4.40}$$

$$\Omega_l^{(1)}(t)=-\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{2p^2}\right) n\cos i\left[1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 i(n_e/\dot{\Omega}_e)\right]\sin 2\Omega_e/\dot{\Omega}_e \tag{4.41}$$

$$\omega_l^{(1)}(t)=\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{2p^2}\right) n\left[1+\frac{5}{2}\sin^2 i(n_e/\dot{\Omega}_e)\right]\sin 2\Omega_e/\dot{\Omega}_e \tag{4.42}$$

$$M_l^{(1)}(t)=-\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{2p^2}\right) n\sqrt{1-e^2}\left[\frac{3}{2}\sin^2 i(n_e/\dot{\Omega}_e)\right]\sin 2\Omega_e/\dot{\Omega}_e \tag{4.43}$$

上述各式中的 $\dot{\Omega}_e$ 为

$$\dot{\Omega}_e=\Omega_1-n_e \tag{4.44}$$

Ω_1 是 Ω 的长期项系数。

积分 $\sigma_s^{(2)}(t)$时，与上一章积分 $\sigma_s^{(1)}(t)$类似，在准到二阶周期项时，积分过程中可视慢变量为常数，且 $\mathrm{d}t$ 与 $\mathrm{d}f$ 之间的转换可用二体问题关系，但积分后慢变量应为 $\bar{\sigma}(t)$。由此积分得

$$a_s^{(2)}(t)=-\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{2a}\right)\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^3\left[(1+\cos i)^2\cos(2u+2\Omega_e)+(1-\cos i)^2\cos(2u-2\Omega_e)\right]\right.$$
$$\left.+2\sin^2 i\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]\cos 2\Omega_e\right\} \tag{4.45}$$

$$e_s^{(2)}(t)=\left(\frac{1-e^2}{2ae}\right)a_s^{(2)}(t)+\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{4ape}\right)\left\{(1+\cos i)^2\left[e\cos(f+2\omega+2\Omega_e)\right.\right.$$
$$\left.+\cos(2u+2\Omega_e)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega+2\Omega_e)\right]+(1-\cos i)^2\left[e\cos(f+2\omega-2\Omega_e)\right.$$
$$\left.\left.+\cos(2u-2\Omega_e)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega-2\Omega_e)\right]\right\} \tag{4.46}$$

$$i_s^{(2)}(t)=-\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{p^2}\right)\sin i\left\{\left[(f-M)+e\sin f\right]\sin 2\Omega_e-\frac{1}{4}(1+\cos i)\left[e\cos(f+2\omega+2\Omega_e)\right.\right.$$
$$\left.+\cos(2u+2\Omega_e)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega+2\Omega_e)\right]$$
$$\left.+\frac{1}{4}(1-\cos i)\left[e\cos(f+2\omega-2\Omega_e)+\cos(2u-2\Omega_e)+\frac{e}{3}\cos(3f+2\omega-2\Omega_e)\right]\right\}$$
$$\tag{4.47}$$

$$\Omega_s^{(2)}(t)=-\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{p^2}\right)\left\{\cos i\left[(f-M)+e\sin f\right]\cos 2\Omega_e\right.$$
$$-\frac{1}{4}(1+\cos i)\left[e\sin(f+2\omega+2\Omega_e)+\sin(2u+2\Omega_e)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega+2\Omega_e)\right]$$
$$\left.+\frac{1}{4}(1-\cos i)\left[e\sin(f+2\omega-2\Omega_e)+\sin(2u-2\Omega_e)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega-2\Omega_e)\right]\right\}$$
$$\tag{4.48}$$

$$\omega_s^{(2)}(t)=\left[\omega_s^{(2)}(t)\right]_1-\cos i\,\Omega_s^{(2)}(t)$$

$$\left[\omega_s^{(2)}(t)\right]_1=-\left(\frac{3a_e^2 J_{22}}{p^2}\right)\left\{\frac{3}{2}\sin^2 i\left[(f-M)+\frac{1}{e}\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\sin f+\frac{1}{2}\sin 2f+\frac{e}{12}\sin 3f\right]\cos 2\Omega_e\right.$$

$$+\frac{1}{8e}(1+\cos i)^2[-\frac{1}{4}e^2\sin(-f+2\omega+2\Omega_e)-(1-\frac{7}{4}e^2)\sin(f+2\omega+2\Omega_e)$$

$$+3e\sin(2u+2\Omega_e)+(\frac{7}{3}+\frac{11}{12}e^2)\sin(3f+2\omega+2\Omega_e)$$

$$+\frac{3}{2}e\sin(4f+2\omega+2\Omega_e)+\frac{1}{4}e^2\sin(5f+2\omega+2\Omega_e)]$$

$$+\frac{1}{8e}(1-\cos i)^2[-\frac{1}{4}e^2\sin(-f+2\omega-2\Omega_e)-(1-\frac{7}{4}e^2)\sin(f+2\omega-2\Omega_e)$$

$$+3e\sin(2u-2\Omega_e)+(\frac{7}{3}+\frac{11}{12}e^2)\sin(3f+2\omega-2\Omega_e)$$

$$+\frac{3}{2}e\sin(4f+2\omega-2\Omega_e)+\frac{1}{4}e^2\sin(5f+2\omega-2\Omega_e)]\} \quad (4.49)$$

$$M_s^{(2)}(t)=-\sqrt{1-e^2}[\omega_s^{(2)}(t)]_1-(\frac{3a_e^2J_{22}}{p^2})\sqrt{1-e^2}\{\frac{3}{8}(1+\cos i)^2$$

$$\times[e\sin(f+2\omega+2\Omega_e)+\sin(2u+2\Omega_e)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega+2\Omega_e)]+\frac{3}{8}(1-\cos i)^2[e\sin(f$$

$$+2\omega-2\Omega_e)+\sin(2u-2\Omega_e)+\frac{e}{3}\sin(3f+2\omega-2\Omega_e)]+\frac{3}{2}\sin^2 i[(f-M)+e\sin f]$$

$$\cos 2\Omega_e\} \quad . \quad (4.50)$$

4. 中心天体快自转情况下的摄动解

对于这种情况，摄动运动方程(4.23)右函数的 J_{22} 部分只有一种项，即

$$f_2=f_{2s}(a,e,i,\Omega,\omega,f;t) \quad (4.51)$$

由于显含 t 的部分对应快变量，又与真近点角 f 同时出现在三角函数的幅角中，故必须将 $(\frac{a}{r})$ 和 f 等量展成平近点角 M 的三角级数。为此，利用第一章 1.3 中给出的结果，将 $(\frac{a}{r})^3$，$(\frac{a}{r})^3\cos 2f$ 和 $(\frac{a}{r})^3\sin 2f$ 展成 M 的三角级数，取到 e^2 项的形式为

$$\left.\begin{aligned}
&(\frac{a}{r})^3=(1+\frac{3}{2}e^2)+3e\cos M+\frac{9}{2}e^2\cos 2M+\cdots\\
&(\frac{a}{r})^3\cos 2f=-\frac{e}{2}\cos M+(1-\frac{5}{2}e^2)\cos 2M+\frac{7}{2}e\cos 3M+\frac{17}{2}e^2\cos 4M+\cdots\\
&(\frac{a}{r})^3\sin 2f=-\frac{e}{2}\sin M+(1-\frac{5}{2}e^2)\sin 2M+\frac{7}{2}e\sin 3M+\frac{17}{2}e^2\sin 4M+\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (4.52)$$

将此式代入(4.18)式得

$$
\begin{aligned}
R_{2s}=\frac{3\mu a_e^2(-J_{22})}{4a^3}\{&(1+\cos i)^2[-\frac{e}{2}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)+(1-\frac{5}{2}e^2)\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)\\
&+\frac{7}{2}e\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)+\frac{17}{2}e^2\cos(4M+2\omega+2\Omega_e)]\\
&+(1-\cos i)^2[-\frac{e}{2}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)+(1-\frac{5}{2}e^2)\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)\\
&+\frac{7}{2}e\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)+\frac{17}{2}e^2\cos(4M+2\omega-2\Omega_e)]\\
&+2\sin^2 i[(1+\frac{3}{2}e^2)\cos 2\Omega_e+\frac{3}{2}e(\cos(M+2\Omega_e)+\cos(M-2\Omega_e))\\
&+\frac{9}{4}e^2(\cos(2M+2\Omega_e)+\cos(2M-2\Omega_e))]\}+O(e^3J_{22})
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

将分解后的 J_2 项摄动函数和 J_{22}项对应的 R_{2s}代入摄动运动方程即得

$$
\dot{\sigma}=f_0(a)+f_1(\sigma;J_2)+f_{2s}(\sigma,t;J_{22})
\tag{4.54}
$$

与 J_{22}项有关的摄动解为

$$
\sigma_s^{(2)}(t)=\int^t[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(2)}(t)+f_{2s}]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t
\tag{4.55}
$$

考虑到实际情况和分析问题的需要，解中只需保留到 $O(e)$项，由此积分上式得

$$
\begin{aligned}
a_s^{(2)}(t)=\frac{3a_e^2(-J_{22})}{2a}\{&(1+\cos i)^2[\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)\\
&-\frac{e}{2(1-2\alpha)}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)+\frac{7e}{2(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)]\\
&+(1-\cos i)^2[\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)\\
&-\frac{e}{2(1+2\alpha)}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)+\frac{7e}{2(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)]\\
&+2\sin^2 i(\frac{3}{2}e)[\frac{1}{1-\alpha}\cos(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e)]\}
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

$$
\begin{aligned}
e_s^{(2)}(t)=\frac{3a_e^2(-J_{22})}{4a^2}\{&(1+\cos i)^2[\frac{1}{2(1-2\alpha)}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)\\
&-\frac{e}{2(1-\alpha)}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)+\frac{7}{6(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)\\
&+\frac{17e}{4(1-\alpha/2)}\cos(4M+2\omega+2\Omega_e)]\\
&+(1-\cos i)^2[\frac{1}{2(1+2\alpha)}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{e}{2(1+\alpha)}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)\\
&+\frac{7}{6(1+2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e)+\frac{17e}{4(1+\alpha/2)}\cos(4M+2\omega-2\Omega_e)]\\
&+2\sin^2 i[\frac{3}{2}(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e))\\
&+\frac{9}{4}e(\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M-2\Omega_e))]\}
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

$$
\begin{aligned}
i_s^{(2)}(t)=\frac{3a_e^2(-J_{22})}{4a^2}\sin i\{&-(1+\cos i)[\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e)\\
&-e(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega+2\Omega_e)]
\end{aligned}
$$

$$+(1-\cos i)[\frac{1}{1+\alpha}\cos(2M+2\omega-2\Omega_e)$$

$$-e(\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\cos(3M+2\omega-2\Omega_e))]$$

$$+2[\frac{1}{\alpha}\cos 2\Omega_e-3e(\frac{1}{1-2\alpha}\cos(M+2\Omega_e)-\frac{1}{1+2\alpha}\cos(M-2\Omega_e))]\} \tag{4.58}$$

$$\Omega_s^{(2)}(t)=\frac{3a_e^2(-J_{22})}{4a^2}\{-(1+\cos i)[\frac{1}{1-\alpha}\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)$$

$$-e(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega+2\Omega_e))]$$

$$+(1-\cos i)[\frac{1}{1+\alpha}\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)$$

$$-e(\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega-2\Omega_e))]$$

$$-2\cos i[\frac{1}{\alpha}\sin 2\Omega_e-3e(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\Omega_e)-\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M-2\Omega_e))]\} \tag{4.59}$$

$$\omega_s^{(2)}(t)=-\cos i\,\Omega_s^{(2)}(t)+[\omega_s^{(2)}(t)]_1$$

$$[\omega_s^{(2)}(t)]_1=\frac{3a_e^2(-J_{22})}{4a^2}(\frac{1}{e})\{-(1+\cos i)^2[\frac{1}{2}(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\omega+2\Omega_e)$$

$$-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega+2\Omega_e))$$

$$+e(\frac{5}{2(1-\alpha)}\sin(2M+2\omega+2\Omega_e)-\frac{17}{4(1-\alpha/2)}\sin(4M+2\omega+2\Omega_e))]$$

$$-(1-\cos i)^2[\frac{1}{2}(\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{7}{3(1-2\alpha/3)}\sin(3M+2\omega-2\Omega_e))$$

$$+e(\frac{5}{2(1-\alpha)}\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)-\frac{17}{4(1-\alpha/2)}\sin(4M+2\omega-2\Omega_e))]$$

$$+2\sin^2 i[\frac{3}{2}(\frac{1}{1-2\alpha}\sin(M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+2\alpha}\sin(M-2\Omega_e))$$

$$+\frac{9}{4}e(-\frac{2}{3\alpha}\sin 2\Omega_e+\frac{1}{1-\alpha}\sin(2M+2\Omega_e)+\frac{1}{1+\alpha}\sin(2M-2\Omega_e))]\} \tag{4.60}$$

$$M_s^{(2)}(t)=-[\omega_s^{(2)}(t)]_1$$

$$+\frac{9a_e^2(-J_{22})}{4a^2}\{(1+\cos i)^2[\frac{1}{1-\alpha}(1-\frac{1}{2(1-\alpha)})\sin(2M+2\omega+2\Omega_e))$$

$$-\frac{e}{1-2\alpha}(1-\frac{1}{2(1-2\alpha)})\sin(M+2\omega+2\Omega_e))+\frac{7e}{3(1-2\alpha/3)}(1-\frac{1}{6(1-2\alpha/3)})\sin(3M+2\omega+2\Omega_e))]$$

$$+(1-\cos i)^2[\frac{1}{1+\alpha}(1-\frac{1}{2(1+\alpha)})\sin(2M+2\omega-2\Omega_e)$$

$$-\frac{1}{1+2\alpha}(1-\frac{1}{2(1+2\alpha)})\sin(M+2\omega-2\Omega_e))+\frac{7e}{3(1-2\alpha/3)}(1-\frac{1}{6(1-2\alpha/3)})\sin(3M+2\omega-2\Omega_e))]$$

$$+2\sin^2 i[-\frac{1}{\alpha}\sin 2\Omega_e+\frac{3e}{1-2\alpha}(1-\frac{1}{2(1-2\alpha)})\sin(M+2\Omega_e))$$

$$+\frac{3e}{1+2\alpha}(1-\frac{1}{2(1+2\alpha)})\sin(M-2\Omega_e))]\} \tag{4.61}$$

上述各式中的 α 与前面慢自转情况中的 α(见(4.44)式)不同,其含义为

$$\alpha=n_e/n \tag{4.62}$$

5. 赤道椭率摄动效应的特征

由于 J_{22} 项是反映中心天体的非旋转对称性，这就相当于一个摄动体附着在球形中心天体上，随着中心天体的自转而转动。因此，摄动效应与该中心天体的自转有关，无论是慢自转情况还是快自转情况，除引起周期摄动效应外，都有可能出现轨道"共振"现象。

对于慢自转情况，共振现象将出现在运动天体的轨道面旋转速率（即 Ω 的长期变化率）与中心天体的自转速率（即摄动体的转动速率）接近时，即(4.44)式中的 $n_e \approx \Omega_1, \alpha \approx 1$。而对于快自转情况，共振现象则是出现在运动天体的平运动速度与中心天体的自转速率接近时，即(4.62)式中的 $n_e \approx n, \alpha \approx 1$。这两种情况，在摄动解中分别出现由于通约而导致的小分母。如果只是接近通约，即 $\alpha \approx 1$，相应的周围项的振幅要增大，周期变长。例如快自转情况下，$\sigma_s^{(2)}(t)$ 中相应的项

$$\frac{1}{1-\alpha}\cos(2M+2\omega+2\Omega_e),\cdots$$

将变为长周期项。如果 $\alpha \to 1$，即 $n_e \to n$，则会导致前面给出的级数解失效。但是运动本身只可能出现类似于单摆的现象，而无其它异常，这是一种有别于一般共振现象的所谓轨道共振，该问题将在后面第六章中介绍。尽管它是一个理论问题，但其天文背景是非常明确的，如 24^h 地球同步卫星的运动，就会出现由于中心天体（地球）非球形引力位引起的上述共振现象。

4.2 第三体摄动

1. 动力模型

在绪论的第 2 节中曾提到过，一个可以归结为受摄二体问题的 N 体系统，N 个天体均看成质点，坐标系建立在中心天体上。不失一般性，可考虑一个天体的运动，摄动天体的轨道当作已知，此即第三体摄动问题。如果摄动天体的轨道与运动天体一样，亦需同时求解，那么仅仅变为同时求解两个天体的摄动运动解问题，从方法而言，只是方程由 6 维变为 12 维，没有任何其它不同之处。下面记 M, m 和 m' 分别为中心天体、运动天体和摄动天体的质量，三个天体的相对位置见图 4.2。

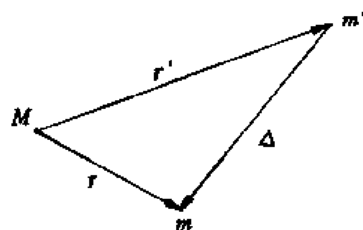


图 4.2 天体的相对位置

关于第三体摄动问题，基本上有两大类。一是外摄情况，即摄动天体到中心天体的距离 r' 大于运动天体到中心天体的距离 r，$(\frac{r}{r'})<1$。另一种是内摄情况，即 $r>r'$，$(\frac{r'}{r})<1$。

对于外摄情况，有两种可能，$\frac{r}{r'} \ll 1$ 或 $m' \ll M$，或两者兼而有之。对内摄情况，则有些不同，通常要求 $m' \ll M$，而并不需要 $\frac{r'}{r} \ll 1$；如果同时有 $\frac{r'}{r} \ll 1$，即摄动天体 m' 非常靠近中心天体，在此情况下，往往改为讨论运动天体 m 相对中心天体 M 与第三体 m' 的质心的运动。

上述两类摄动模型，在太阳系中背景是非常明确的。人造卫星绕地球运动受太阳、月球和其它大行星的摄动，自然卫星绕相应行星运动受另一颗“外”卫星、太阳和其它大行星的摄动，小行星绕太阳运动受“外”行星(这里指小行星轨道外侧的大行星)的摄动，以及一个大行星绕太阳运动受另一个在其轨道外侧的大行星的摄动等，均属于外摄情况的第三体摄动问题。而人造卫星受地球非球形引力位的田谐项摄动(如上一节讨论的 J_{22} 项即代表一个摄动天体)，自然卫星运动受另一个“内”卫星的摄动等，则都属于内摄情况的第三体摄动问题。

这一节将以典型的外摄情况作为讨论问题的背景，系统地阐述如何应用改进的摄动法(平均根数法)构造摄动解(级数解)的过程，并给出相应摄动解的具体表达式。所采用的坐标系为 $O\text{-}xyz$，坐标原点 O 即中心天体(质心上)，xy 坐标面为某一参考平面，如讨论大行星的卫星运动(包括人造地球卫星和其它大行星的轨道器)时，这一参考平面即相应大行星的赤道面，面讨论小行星和大行星的运动，往往采用黄道面或太阳系不变平面。x 轴方向为某一固定方向，如春分点方向。在此坐标系中，天体 m 的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}-Gm'\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\right) \tag{4.63}$$

其中 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{\Delta}$ 的意义见图 4.2，$\mu=G(M+m)$，G 为万有引力常数。相应的摄动函数 R 即

$$\begin{aligned}R&=Gm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\cdot\boldsymbol{r}\right)\\&=Gm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r}{r'^2}\cos\psi\right)\end{aligned} \tag{4.64}$$

其中 ψ 是运动天体 m 和摄动天体 m' 对中心天体的张角，见图 4.2，并有

$$\cos\psi=\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}\right) \tag{4.65}$$

由定义

$$\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$$

在外摄情况下，$r<r'$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}&=(r^2+r'^2-2rr'\cos\psi)^{1/2}\\&=\frac{1}{r'}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\psi)\left(\frac{r}{r'}\right)^k\end{aligned} \tag{4.66}$$

其中 $P_k(\cos\psi)$ 是 $\cos\psi$ 的勒让德多项式，上一节已出现过，且有

$$P_0(\cos\psi)=1,\quad P_1(\cos\psi)=\cos\psi \tag{4.67}$$

而仅与摄动天体位置有关的项，对所讨论的问题无贡献，由此将(4.66)式表达的 $\frac{1}{\Delta}$ 代入(4.64)式得

$$\begin{aligned}R&=\frac{Gm'}{r'}\sum_{k\geq2}\left(\frac{r}{r'}\right)^kP_k(\cos\psi)\\&=Gm'\left[\frac{r^2}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi-\frac{1}{2}\right)+\frac{r^3}{r'^4}\left(\frac{5}{2}\cos^3\psi-\frac{3}{2}\cos\psi\right)\right]\end{aligned} \tag{4.68}$$

这一表达式对内摄情况($r>r'$)不适用，但亦可用类似方法处理，有

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r}\left(1-2\frac{r'}{r}\cos\psi+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\psi)\left(\frac{r'}{r}\right)^k \tag{4.69}$$

代入(4.64)式后得

$$R=Gm'\left[\frac{1}{r}+\left(\frac{r'}{r^2}-\frac{r}{r'^2}\right)\cos\psi+\frac{r'^2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\psi-\frac{1}{2}\right)+\cdots\right] \tag{4.70}$$

下面讨论外摄情况，面且仅考虑 $P_2(\cos\psi)$ 项，其原因是略去的项为 $(\frac{r}{r'})$ 的高次项，因通常 $(\frac{r}{r'})\ll 1$。即使不满足这一条件，只要对 $P_2(\cos\psi)$ 项讨论清楚，那么对与此类似的 $P_3(\cos\psi)$，… 等项也就不成问题了。不过，如果运动天体在运动过程中与摄动天体相互接近，那么上述考虑会发生问题，关于这一特殊情况的处理，可参看文[2]及其有关文献资料，这里不再讨论。

2. 摄动函数 R 的分解

首先要将 R 表示成轨道根数的形式，关键在于 $\cos\psi$ 的表示方法。由定义(4.65)式，利用第一章给出的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的根数表达式(1.37)，不难导出

$$\cos\psi=A\cos f+B\sin f \tag{4.71}$$

其中

$$\begin{aligned}A=\frac{1}{4}\{&(1-\cos i)[(1+\cos i')\cos(\omega-\theta+u')+(1-\cos i')\cos(\omega-\theta-u')]\\&+(1+\cos i)[(1+\cos i')\cos(\omega+\theta-u')+(1-\cos i')\cos(\omega+\theta+u')]\\&+2\sin i\sin i'[\cos(\omega-u')-\cos(\omega+u')]\}\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}B=-\frac{1}{4}\{&(1-\cos i)[(1+\cos i')\sin(\omega-\theta+u')+(1-\cos i')\sin(\omega-\theta-u')]\\&+(1+\cos i)[(1+\cos i')\sin(\omega+\theta-u')+(1-\cos i')\sin(\omega+\theta+u')]\\&+2\sin i\sin i'[\sin(\omega-u')-\sin(\omega+u')]\}\end{aligned} \tag{4.73}$$

这里

$$\theta=\Omega-\Omega',\quad u'=f'+\omega' \tag{4.74}$$

所有带“ $'$ ”的根数 i'，Ω'，ω'，f' 等，均为摄动天体相对同一中心天体的轨道根数，下面不再说明。将 $\cos\psi$ 代入(4.68)式，取到 $P_2(\cos\psi)$ 项，得

$$R=\frac{3}{2}\beta a^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(A^2+B^2)+\frac{1}{2}(A^2-B^2)\cos 2f+AB\sin 2f\right] \tag{4.75}$$

$$\beta=Gm'/r'^3 \tag{4.76}$$

对于 $(\frac{r}{r'})\ll 1$ 的外摄情况，上述表达式比较理想，因为在这种情况下，只有运动天体的真近点角 f 是快变量，而 Ω,ω 和摄动天体的 Ω'，ω'，f' 都是慢变量，上述表达式正好将快、慢变量完全分开，这便于求相应摄动解的各种摄动项。

对于不满足 $(r/r')\ll 1$ 的情况以及一些理论问题，如研究小行星运动中的轨道共振(包括长期共振)问题，将会涉及运动天体和摄动天体的运动根数 f,f' 和有关量均要展成相应的平近点角 M 和 M' 的三角级数，则 $\cos\psi$ 的表达式往往采用另一种表达形式，即

$$\cos\psi=\left(1-\sin^2\frac{i}{2}-\sin^2\frac{i'}{2}+\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i'}{2}\right)\cos(\lambda-\lambda')$$

$$+\frac{1}{2}\sin i\sin i'[\cos(u-u')-\cos(u+u')]$$

$$+\sin^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{i'}{2}\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega)+\cos^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i'}{2}\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega')$$

$$+\sin^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i'}{2}\cos(\lambda-\lambda'-2\Omega+2\Omega') \tag{4.77}$$

其中

$$u=f+\omega,\quad u'=f'+\omega',\quad \lambda=f+\omega+\Omega,\quad \lambda'=f'+\omega'+\Omega' \tag{4.78}$$

特别当 $i'=0$ 时，即坐标系的 xy 平面采用摄动天体绕同一中心天体运动的轨道平面，如讨论小行星的运动，常作这样的处理，上述表达式即可简化为

$$\cos\psi=(1-\sin^2\frac{i}{2})\cos(\lambda-\lambda')+\sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda+\lambda'-2\Omega) \tag{4.79}$$

现在回到对(4.75)式的讨论。利用第一章求平均值的方法给出

$$\overline{(\frac{r}{a})^2}=1+\frac{3}{2}e^2,\quad \overline{(\frac{r}{a})^2\cos 2f}=\frac{5}{2}e^2,\quad \overline{(\frac{r}{a})^2\sin 2f}=0 \tag{4.80}$$

于是摄动函数 R 即可分解为

$$R=R_c+R_l+R_s \tag{4.81}$$

$$R_c=\frac{3}{2}\beta a^2[C(1+\frac{3}{2}e^2)] \tag{4.82}$$

$$R_l=\frac{3}{2}\beta a^2[L_1(1+\frac{3}{2}e^2)+L_2(\frac{5}{2}e^2)] \tag{4.83}$$

$$R_s=\frac{3}{2}\beta a^2\{S_1[(\frac{r}{a})^2-(1+\frac{3}{2}e^2)]+S_2[(\frac{r}{a})^2\cos 2f-\frac{5}{2}e^2]+S_3(\frac{r}{a})^2\sin 2f\} \tag{4.84}$$

其中

$$C=\frac{1}{6}(1-\frac{3}{2}\sin^2 i')(1-\frac{3}{2}\sin^2 i) \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}L_1=\frac{1}{16}\{&\sin^2 i[2\sin^2 i'\cos 2\theta+(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')+(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')]\\&+2\sin 2i[2\sin 2i'\cos\theta-\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')+\sin i'(1-\cos i')\cos(2\theta+2u')]\\&+4(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)[\sin^2 i'\cos 2u']\}\end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}L_2=\frac{1}{16}\{&\frac{1}{2}(1-\cos i)^2D_1+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2D_2+\sin^2 iD_3\\&+2\sin i(1-\cos i)D_4+2\sin i(1+\cos i)D_5\}\end{aligned} \tag{4.87}$$

$$S_1=C+L_1 \tag{4.88}$$

$$S_2=L_2 \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}S_3=-\frac{1}{16}\{&\frac{1}{2}(1-\cos i)^2D_6+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2D_7+\sin^2 iD_8\\&+2\sin i(1-\cos i)D_9+2\sin i(1+\cos i)D_{10}\}\end{aligned} \tag{4.90}$$

关于 $D_1,D_2,\cdots,D_{10}$ 的表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}&D_1=2\sin^2 i'\cos(2\omega-2\theta)+(1+\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta+2u')+(1-\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta-2u')\\&D_2=2\sin^2 i'\cos(2\omega+2\theta)+(1+\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta-2u')+(1-\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta+2u')\\&D_3=4(1-\frac{3}{2}\sin^2 i')\cos 2\omega+3\sin^2 i'\cos(2\omega-2u')+3\sin^2 i'\cos(2\omega+2u')\\&D_4=\sin i'[2\cos i'\cos(2\omega-\theta)-(1+\cos i')\cos(2\omega-\theta+2u')+(1-\cos i')\cos(2\omega-\theta-2u')]\\&D_5=\sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega+\theta)+(1+\cos i')\cos(2\omega+\theta-2u')-(1-\cos i')\cos(2\omega+\theta+2u')]\end{aligned}\right\}$$

$$(4.91)$$

$$\left.\begin{aligned}
D_6 &= 2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)+(1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')+(1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u') \\
D_7 &= 2\sin^2 i\sin(2\omega+2\theta)+(1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')+(1-\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta+2u') \\
D_8 &= 4(1-\frac{3}{2}\sin^2 i')\sin 2\omega+3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')+3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u') \\
D_9 &= \sin i'[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)-(1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u')+(1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')] \\
D_{10} &= \sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)+(1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u') \\
&\quad -(1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')]
\end{aligned}\right\} \tag{4.92}$$

3. **摄动解**

将摄动函数 R 代入$(\partial R/\partial\sigma)$型的摄动运动方程即得

$$\dot{\sigma}=f_0(a)+f_\varepsilon(\sigma,\sigma',t) \tag{4.93}$$

关于摄动部分 f_ε 的大小，可作如下估计，对于外摄且$(\frac{r}{r'})\ll 1$ 的情况，有 $r\ll(\Delta,r')$，因此

$$\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta^3}+\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\approx\frac{1}{r'^3}(\boldsymbol{\Delta}+\boldsymbol{r}')=\frac{\boldsymbol{r}}{r'^3} \tag{4.94}$$

于是由(4.63)式可知，第三体摄动加速度 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 与中心引力加速度 $\boldsymbol{F}_0$ 大小之比为

$$\varepsilon=\frac{F_\varepsilon}{F_0}=(\frac{m'}{M+m})(\frac{r}{r'})^3 \tag{4.95}$$

由此便可给出 f_ε 的相对大小。

对于人造地球卫星的运动，前面已指出，地球非球形扁率项(J_2)的摄动量级为 10^{-3}，看作一阶小量，而 J_{22}项以及上述(4.95)式表达的第三体(日、月)摄动的量级均为二阶小量。对于太阳系中其它天体的运动情况，上述第三体摄动的量级有可能上升为一阶小量，但 f_ε 中的长周期部分往往更小些，可近似地视为二阶小量。因些，对于前一种力学系统，若同时考虑 J_2 项摄动，则有

$$\dot{\sigma}=f_0(a)+f_1(\sigma;J_2)+f_2(\sigma,\sigma',t;\varepsilon) \tag{4.96}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= f_{1c}+f_{1s} \\
f_2 &= f_{2c}+f_{2l}+f_{2s}
\end{aligned}\right\} \tag{4.97}$$

f_2 是第三体摄动部分。对于后一类力学系统，可以写成

$$\dot{\sigma}=f_0(a)+f_1(\sigma,\sigma',t)+f_2(\sigma,\sigma',t) \tag{4.98}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= f_{1c}+f_{1s} \\
f_2 &= f_{2l}
\end{aligned}\right\} \tag{4.99}$$

f_1 和 f_2 均包含第三体摄动部分。

在上述处理下，用平均根数法构造摄动解时，仅仅涉及到第三体摄动的各种摄动项可由下列积分给出：

$$\sigma_c(t-t_0)=\int_{t_0}^{t}(f_c)_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t \tag{4.100}$$

$$\sigma_l(t)=\int^t\left[f_l+\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)})_j\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t \tag{4.101}$$

$$\sigma_s(t)=\int^t\left[\delta\frac{\partial n}{\partial a}a_s(t)+f_s\right]_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t \tag{4.102}$$

对于前一种力学系统，有

$$\left.\begin{array}{l}f_c=f_{2c}(a,e,i,a',e',i';\varepsilon)\\f_l=f_{2l}(\sigma,\sigma',t;\varepsilon)\\f_s=f_{2s}(\sigma,\sigma',t;\varepsilon)\\f_{1c}=f_{1c}(a,e,i;J_2)\end{array}\right\} \tag{4.103}$$

而对于后一种力学系统，则有

$$\left.\begin{array}{l}f_c=f_{1c}(a,e,i,a',e',i';\varepsilon)\\f_l=f_{2l}(\sigma,\sigma',t;\varepsilon^2)\\f_s=f_{1s}(\sigma,\sigma',t;\varepsilon)\end{array}\right\} \tag{4.104}$$

上述两种系统，f_ε 的三个部分 f_c，f_l 和 f_s 都分别对应于(4.82)～(4.84)式给出的 R_c，R_l 和 R_s。

积分(4.100)式，给出第三体摄动的长期项 $\sigma_c(t-t_0)$，相应的长期项系数 σ_c 的表达式为

$$a_c=0,\quad e_c=0,\quad i_c=0 \tag{4.105}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_c=-(\frac{3}{4}\beta a^3)(1-\frac{3}{2}\sin^2 i')(1+\frac{3}{2}e^2)(1-e^2)^{-1/2}n\cos i\\\omega_c=(\frac{3}{4}\beta a^3)(1-\frac{3}{2}\sin^2 i')[(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)+\frac{1}{2}e^2](1-e^2)^{-1/2}n\\M_c=-(\frac{3}{4}\beta a^3)(1-\frac{3}{2}\sin^2 i')(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)(\frac{7}{3}+e^2)n\end{array}\right\} \tag{4.106}$$

β 的意义已变为 $Gm'/\mu r'^3$，积分(4.101)式，但只列出直接部分

$$\int^t(f_l)_{\bar{\sigma}}\mathrm{d}t$$

的结果，即

$$a_l(t)=0 \tag{4.107}$$

$$e_l(t)=-(\frac{3}{2}\beta a^3)n(\frac{5}{2}e\sqrt{1-e^2})H_1 \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}i_l(t)=&(\frac{3}{2}\beta a^3)n(\frac{5}{2}e\sqrt{1-e^2})(\frac{\cos i}{\sin i})H_1\\&-(\frac{3}{2}\beta a^3)n(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i})[(1+\frac{3}{2}e^2)H_2+(\frac{5}{2}e^2)H_3]\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\Omega_l(t)=(\frac{3}{2}\beta a^3)n(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i})[(1+\frac{3}{2}e^2)H_4+(\frac{5}{2}e^2)H_5] \tag{4.110}$$

$$\omega_l(t)=-\cos i\,\Omega_l(t)+(\frac{3}{2}\beta a^3)n\sqrt{1-e^2}[3H_6+5H_7] \tag{4.111}$$

$$M_l(t)=-(\frac{3}{2}\beta a^3)n[(7+3e^2)H_6+(5+5e^2)H_7] \tag{4.112}$$

其中

$$H_1-\frac{1}{8}[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2K_1+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2K_2+\sin^2 iK_3$$

$$+2\sin i(1-\cos i)K_4+2\sin i(1+\cos i)K_5] \qquad (4.113)$$

$$H_2=\frac{1}{8}[\sin^2 iK_6+\sin 2iK_7] \qquad (4.114)$$

$$H_3=\frac{1}{8}[-\frac{1}{2}(1-\cos i)^2K_1+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2K_2$$
$$-\sin i(1-\cos i)K_4+\sin i(1+\cos i)K_5] \qquad (4.115)$$

$$H_4=\frac{1}{16}[\sin 2iK_{16}+4\cos 2iK_{17}-6\sin 2iK_{18}] \qquad (4.116)$$

$$H_5=\frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)K_{11}-\sin i(1+\cos i)K_{12}+\sin 2iK_{13}$$
$$+2(\cos i-\cos 2i)K_{14}+2(\cos i+\cos i2i)K_{15}] \qquad (4.117)$$

$$H_6=\frac{1}{16}[\sin^2 iK_{16}+2\sin 2iK_{17}+2(2-3\sin^2 i)K_{18}] \qquad (4.118)$$

$$H_7=\frac{1}{16}[\frac{1}{2}(1-\cos i)^2K_{11}+\frac{1}{2}(1+\cos i)^2K_{12}+\sin^2 iK_{13}$$
$$+2\sin i(1-\cos i)K_{14}+2\sin i(1+\cos i)K_{15}] \qquad (4.119)$$

$$K_1=2\sin^2 i'\cos(2\omega-2\theta)/n_1+(1+\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta+2u')/n_2$$
$$+(1-\cos i')^2\cos(2\omega-2\theta-2\omega')/n_3 \qquad (4.120)_1$$

$$K_2=2\sin^2 i'\cos(2\omega+2\theta)/n_4+(1+\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta-2u')/n_5$$
$$+(1-\cos i')^2\cos(2\omega+2\theta+2u')/n_6 \qquad (4.120)_2$$

$$K_3=2(2-3\sin^2 i')\cos 2\omega/2\omega_c+3\sin^2 i'\cos(2\omega-2u')/n_7+3\sin^2 i'\cos(2\omega+2u')/n_8$$
$$(4.120)_3$$

$$K_4=\sin i'[2\cos i'\cos(2\omega-\theta)/n_9-(1+\cos i')\cos(2\omega-\theta+2u')/n_{10}$$
$$+(1-\cos i')\cos(2\omega-\theta-2u')/n_{11}] \qquad (4.120)_4$$

$$K_5=\sin i'[-2\cos i'\cos(2\omega+\theta)/n_{12}+(1+\cos i')\cos(2\omega+\theta-2u')/n_{13}$$
$$-(1-\cos i')\cos(2\omega+\theta+2u')/n_{14}] \qquad (4.120)_5$$

$$K_6=2\sin^2 i'\cos 2\theta/2\theta_c+(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')/n_{15}+(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')/n_{16}$$
$$(4.120)_6$$

$$K_7=\sin 2i'\cos\theta/\theta_c-\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')/n_{17}+\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')/n_{18}$$
$$(4.120)_7$$

$$K_{11}=2\sin^2 i'\sin(2\omega-2\theta)/n_1+(1+\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta+2u')/n_2$$
$$+(1-\cos i')^2\sin(2\omega-2\theta-2u')/n_3 \qquad (4.121)_1$$

$$K_{12}=2\sin^2 i'\sin(2\omega+2\theta)/n_4+(1+\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta-2u')/n_5$$
$$+(1-\cos i')^2\sin(2\omega+2\theta+2u')/n_6 \qquad (4.121)_2$$

$$K_{13}=2(2-3\sin^2 i')\sin 2\omega/2\omega_c+3\sin^2 i'\sin(2\omega-2u')/n_7+3\sin^2 i'\sin(2\omega+2u')/n_8$$
$$(4.121)_3$$

$$K_{14}=\sin i'[2\cos i'\sin(2\omega-\theta)/n_9-(1+\cos i')\sin(2\omega-\theta+2u')/n_{10}$$
$$+(1-\cos i')\sin(2\omega-\theta-2u')/n_{11}] \qquad (4.121)_4$$

$$K_{15}=\sin i'[-2\cos i'\sin(2\omega+\theta)/n_{12}+(1+\cos i')\sin(2\omega+\theta-2u')/n_{13}$$
$$-(1-\cos i')\sin(2\omega+\theta+2u')/n_{14}] \qquad (4.121)_5$$

$$K_{16}=2\sin^2 i'\sin 2\theta/2\theta_c+(1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')/n_{15}+(1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')/n_{16} \qquad (4.121)_6$$

$$K_{17}=\sin 2i'\sin\theta/\theta_c-\sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')/n_{17}+\sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')/n_{18} \qquad (4.121)_7$$

$$K_{18}=\sin^2 i'\sin 2u'/2n' \qquad (4.121)_8$$

上述各式中的 $n_1, n_2, \cdots, n_{18}$是慢变量的变化率，即

$$\left.\begin{array}{lll} n_1=2\omega_c-2\theta_c, & n_2=2\omega_c-2\theta_c+2n', & n_3=2\omega_c-2\theta_c-2n' \\ n_4=2\omega_c+2\theta_c, & n_5=2\omega_c+2\theta_c-2n', & n_6=2\omega_c+2\theta_c+2n' \\ n_7=2\omega_c-2n', & n_8=2\omega_c+2n', & n_9=2\omega_c-\theta_c \\ n_{10}=2\omega_c-\theta_c+2n', & n_{11}=2\omega_c-\theta_c-2n', & n_{12}=2\omega_c+\theta_c \\ n_{13}=2\omega_c+\theta_c-2n', & n_{14}=2\omega_c+\theta_c+2n', & n_{15}=2\theta_c-2n' \\ n_{16}=2\theta_c+2n', & n_{17}=\theta_c-2n', & n_{18}=\theta_c+2n' \end{array}\right\} \qquad (4.122)$$

其中

$$\theta_c=\Omega_c-\Omega'_c \qquad (4.123)$$

Ω_c, ω_c 是运动天体的 Ω, ω 的长期变率，而 Ω'_c 和 n' 是摄动天体的 Ω' 和 u' 的长期变率。

积分(4.102)式给出短周期项 $\sigma_s(t)$，即

$$a_s(t)=(\frac{3}{2}\beta a^3)2aG_1 \qquad (4.124)$$

$$e_s(t)=(\frac{3}{2}\beta a^3)(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e})(\sqrt{1-e^2}G_1-G_2) \qquad (4.125)$$

$$i_s(t)=(\frac{3}{2}\beta a^3)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}(\cos iG_2-G_3) \qquad (4.126)$$

$$\Omega_s(t)=(\frac{3}{2}\beta a^3)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}G_4 \qquad (4.127)$$

$$\omega_s(t)=(\frac{3}{2}\beta a^3)(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e})G_5-\cos i\Omega_s(t) \qquad (4.128)$$

$$M_s(t)=-(\frac{3}{2}\beta a^3)(\frac{1-e^2}{e}G_5+7G_6) \qquad (4.129)$$

其中

$$G_1=S_1[-e^2-2e\cos E+\frac{1}{2}e^2\cos 2E]+S_2[-e^2-2e\cos E+(1-\frac{1}{2}e^2)\cos 2E]$$
$$+S_3\sqrt{1-e^2}[-2e\sin E+\sin 2E] \qquad (4.130)$$

$$G_j=S_{1j}[e(4+\frac{3}{4}e^2)\sin E+\frac{3}{4}e^2\sin 2E-\frac{1}{12}e^3\sin 3E]$$
$$+S_{2j}[-\frac{5}{2}e(1-\frac{1}{2}e^2)\sin E+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}e^2)\sin 2E-\frac{1}{6}e(1-\frac{1}{2}e^2)\sin 3E]$$
$$+S_{3j}\sqrt{1-e^2}[\frac{5}{2}e\cos E-\frac{1}{2}(1+e^2)\cos 2E+\frac{1}{6}e\cos 3E], \quad j=2,3,4,6 \qquad (4.131)$$

$$G_5=S_1[(-2+e^2)\sin E+\frac{1}{2}e\sin 2E]$$
$$+S_2[-3(1-e^2)\sin E-\frac{1}{2}e\sin 2E+\frac{1}{3}\sin 3E]$$

$$+S_3(1-e^2)^{-1/2}\left[3\left(1-\frac{11}{6}e^2\right)\cos E+\frac{1}{2}e(1+e^2)\cos 2E-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}e^2\right)\cos 3E\right]$$

(4.132)

这里 $S_{1j}, S_{2j}, S_{3j}(j=2,3,4,6)$ 的表达式如下：

$$S_{12}=0 \tag{4.133}$$

$$S_{13}=\frac{1}{16}\{-2\sin^2 i[2\sin^2 i'\sin 2\theta+(1+\cos i')^2\sin(2\theta-2u')+(1-\cos i')^2\sin(2\theta+2u')]$$
$$-2\sin 2i[\sin 2i'\sin\theta-\sin i'(1+\cos i')\sin(\theta-2u')+\sin i'(1-\cos i')\sin(\theta+2u')]\} \tag{4.134}$$

$$S_{14}=-\frac{1}{4}\sin 2i\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i'\right)+\frac{1}{16}\{\sin 2i[2\sin^2 i'\cos 2\theta+(1+\cos i')^2\cos(2\theta-2u')$$
$$+(1-\cos i')^2\cos(2\theta+2u')]+4\cos 2i[\sin 2i'\cos\theta-\sin i'(1+\cos i')\cos(\theta-2u')$$
$$+\sin i'(1-\cos i')\cos(\theta+2u')]-6\sin 2i[\sin^2 i'\cos 2u']\} \tag{4.135}$$

$$S_{16}=S_1 \tag{4.136}$$

$$S_{22}=2S_3 \tag{4.137}$$

$$S_{23}=\frac{1}{16}[(1-\cos i)^2 D_6-(1+\cos i)^2 D_7+2\sin i(1-\cos i)D_9-2\sin i(1+\cos i)D_{10}] \tag{4.138}$$

$$S_{24}=\frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)D_1-\sin i(1+\cos i)D_2+\sin 2iD_3$$
$$+2(\cos i-\cos 2i)D_4+2(\cos i+\cos 2i)D_5] \tag{4.139}$$

$$S_{26}=S_2 \tag{4.140}$$

$$S_{32}=-2S_2 \tag{4.141}$$

$$S_{33}=\frac{1}{16}[(1-\cos i)^2 D_1-(1+\cos i)^2 D_2$$
$$+2\sin i(1-\cos i)D_4-2\sin i(1+\cos i)D_5] \tag{4.142}$$

$$S_{34}=-\frac{1}{16}[\sin i(1-\cos i)D_6-\sin i(1+\cos i)D_7+\sin 2iD_8$$
$$+2(\cos i-\cos 2i)D_9+2(\cos i-\cos 2i)D_{10}] \tag{4.143}$$

$$S_{36}=S_3 \tag{4.144}$$

关于摄动天体的轨道根数 σ' 的处理，要根据具体背景和精度要求而定，有些问题是需要同时求解的。下面针对可以看作时间 t 的已知函数情况举一实例，即人造地球卫星运动中的日、月摄动。在计算短周期项时，如需要考虑厘米级的精度，那么对太阳有

$$i'=\varepsilon,\quad \Omega'=0,\quad u'=L_\odot \tag{4.145}$$

其中 ε 是黄赤交角，$L_\odot$ 即太阳地心平黄经。对月球，则有

$$u'=M'+\omega'=L_{☾}-(\Omega_{☾}-\theta_{☾}) \tag{4.146}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos i'&=\cos\varepsilon\cos J-\sin\varepsilon\sin J\cos\Omega_{☾}\\ \sin i'&=(1-\cos^2 i')^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{4.147}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\Omega'&=\frac{\sin J\sin\Omega_{☾}}{\sin i'}\\ \cos\Omega'&=\frac{\cos J-\cos\varepsilon\cos i'}{\sin\varepsilon\sin i'}\end{aligned}\right\} \tag{4.148}$$

$$\sin(\Omega_{☾}-\theta_{☾})=\frac{1}{\sin i'}\left(\cos\varepsilon\sin\Omega_{☾}\sin J-\sin\varepsilon\sin 2\Omega_{☾}\sin^2\frac{J}{2}\right) \tag{4.149}$$

其中 $L_☾$,$\Omega_☾$ 分别为月球的平黄经和升交点的平黄经。由于黄白交角 $J=5°09'$,$(\Omega_☾-\theta_☾)=O(J)$,因此 $(\Omega_☾-\theta_☾)$ 的象限是确定的。上述处理在类似问题中亦可采用。

4. 第三体摄动效应的特征

第三体摄动力亦是保守力,除具有保守力摄动特征(即对 a,e,i 三根数无直接的长期摄动影响)外,因其显含 t,和上一节介绍的 J_{22} 项摄动(对应内摄情况)类似,亦会引起共振现象。对于 $(\frac{r}{r'})\ll 1$ 的情况,共振项是出现在 $\sigma_l(t)$ 中,这可从 $n_2,n_3,\cdots$ 的表达式中看出。而对一般 $(\frac{r}{r'})<1$,f' 亦为快变量的情况,共振项将出现在短周期项中,这涉及到摄动解中的 f 和 f' 均要展为 M 和 M' 的三角级数,前面已提到过,相应的轨道共振问题是解释太阳系主带小行星分布特征的一个重大课题。

4.3 辐射压摄动

太阳系中,大小天体的运动都将受到太阳辐射压的作用,在其它恒星和星系系统中亦有类似情况。但是,在太阳系自然天体(大、小行星和自然卫星等)的运动中,人们并未注意这一问题,而当人造地球卫星上天后才引起人们的关注。其原因是,辐射压力是一面力,它的大小与承受辐射压作用的运动天体的有效面积质量比(简称面质比)有关,人造地球卫星的面质比相对而言要比太阳系中的自然天体大得多,所受辐射压的影响也就十分明显。本节将分别介绍辐射压力的计算、两种类型(辐射源分别为中心天体和摄动天体)的辐射压效应,以及辐射压摄动解及其特征。

1. 辐射压力(简称光压力)的计算

对于任一运动天体,不管它的形状和空间姿态如何,我们可首先取一"无限小"面元 ds 作为平面考虑,如图 4.3 所示。作用于其上的光压力为一合力,即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2 \qquad (4.150)$$

其中 d$\boldsymbol{F}_1$ 和 d$\boldsymbol{F}_2$ 各为面元 ds 受到的光压力和反射导致的作用力,有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1=-\rho_\odot(\hat{n}\cdot\hat{L}_\odot)\mathrm{d}s\hat{L}_\odot \qquad (4.151)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2=-\eta|\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1|\hat{\boldsymbol{L}}_\odot' \qquad (4.152)$$

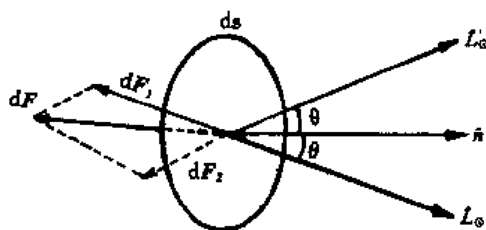


图 4.3 面元 ds 上承受的光压合力 dF

这里 $\rho_\odot$ 是面元处的光压强度,$\hat{n}$ 即所取面元 ds 的法向单位矢量,它与辐射源方向的单位矢量 $\hat{L}_\odot$ 之间的夹角为 θ,d$\boldsymbol{F}_2$ 的方向符合反射规律(见图 4.3),但其大小与面元 ds 的反射性能有关,η 就是该面元的反射系数。若为完全反射,$\eta=1$,完全吸收则对应 $\eta=0$,通常 $0<\eta<1$。于是由(4.150)式表达的光压合力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-\rho_{\odot}\mathrm{d}s\cos\theta(\hat{L}_{\odot}+\eta\hat{L}'_{\odot}) \tag{4.153}$$

其中 $\mathrm{d}s\cos\theta$ 即面 $\mathrm{d}s$ 在垂直辐射源方向的投影部分。

为了计算光压力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$，需将 $\hat{L}'_{\odot}$ 用已知方向 $\hat{L}_{\odot}$ 和 $\hat{n}$ 来表达。为此引进 $\hat{n}'$ 和 $\hat{\tau}$，定义如下：

$$\left.\begin{aligned}\hat{n}'&=\frac{\hat{L}_{\odot}\times\hat{n}}{\sin\theta}\\ \hat{\tau}&=\hat{n}\times\hat{n}'=\frac{1}{\sin\theta}\hat{n}\times(\hat{L}_{\odot}\times\hat{n})\end{aligned}\right\} \tag{4.154}$$

显然，$\hat{n}'$ 和 $\hat{\tau}$ 均在面元 $\mathrm{d}s$ 内，与 $\hat{n}$ 垂直，且 $\hat{n}$，$\hat{n}'$ 与 $\hat{\tau}$ 构成右手螺旋系统。根据矢量运算公式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

可得

$$\sin\theta\hat{\tau}=(\hat{n}\cdot\hat{n})\hat{L}_{\odot}-(\hat{n}\cdot\hat{L}_{\odot})\hat{n}=\hat{L}_{\odot}-\cos\theta\hat{n} \tag{4.155}$$

$\hat{L}'_{\odot}$ 显然在 $\hat{n}$ 和 $\hat{\tau}$ 确定的平面内，因此有

$$\begin{aligned}\hat{L}'_{\odot}&=(\hat{L}'_{\odot}\cdot\hat{n})\hat{n}+(\hat{L}'_{\odot}\cdot\hat{\tau})\hat{\tau}\\ &=\cos\theta\hat{n}+(\hat{L}_{\odot}'\cdot\hat{L}_{\odot}-\cos\theta\hat{L}_{\odot}'\cdot\hat{n})\hat{\tau}/\sin\theta\\ &=\cos\theta\hat{n}-\sin\theta\hat{\tau}\\ &=2\cos\theta\hat{n}-\hat{L}_{\odot}\end{aligned} \tag{4.156}$$

以此式代入(4.153)式得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-\rho_{\odot}\mathrm{d}s\cos\theta[(1-\eta)\hat{L}_{\odot}+2\eta\cos\theta\hat{n}] \tag{4.157}$$

于是作用在整个运动天体上的光压力即为下列面积积分：

$$\boldsymbol{F}_{\odot}=-\oiint_{(\omega)}\rho_{\odot}\cos\theta[(1-\eta)\hat{L}_{\odot}+2\eta\cos\theta\hat{n}]\mathrm{d}s \tag{4.158}$$

这里的积分区域(ω)表示遍及运动天体承受光压力的表面部分。

如果运动天体的外形为一平面(人造地球卫星的平面天线即如此)，面积为 S，且其尺度相对到太阳的距离很小，则上式简化为

$$\boldsymbol{F}_{\odot}=-\rho_{\odot}S\cos\theta[(1-\eta)\hat{L}_{\odot}+2\eta\cos\theta\hat{n}] \tag{4.159}$$

若进一步有 $\theta=0$，即该平面法向始终指向辐射源，则有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\odot}&=-KS\rho_{\odot}\hat{L}_{\odot}\\ K&=1+\eta\end{aligned}\right\} \tag{4.160}$$

对于一个球形运动天体，相应的光压力亦由上式表达，其中 S 为其截面积(即该球体大圆的圆面积)。下面就以(4.160)式表达的光压力来讨论在辐射压作用下运动天体轨道的变化规律。至于一般情况下，光压力公式的复杂性，主要是在人造地球卫星的运动中会遇到，即一些非球形卫星，要严格计算所承受的光压力，将涉及到该卫星的具体形状和空间姿态，读者可参看有关文献。

2. 光压摄动的两种情况

(1)辐射源即中心天体。小行星和大行星等天体的运动即属于这一类，辐射天体即太阳，此时作用在运动天体上的光压力(4.160)式可改写为下列形式：

$$\boldsymbol{F}_{\odot}=KS\rho_{\odot}\left(\frac{r_0^2}{r^2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{4.161}$$

这里 $\rho_\odot$ 是对应 $r=r_0$ 处的光压强度，但仍记作 $\rho_\odot$。

(2)辐射源为摄动天体。人造地球卫星、月球卫星和自然卫星的运动都属这一类，相应的光压力公式有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_\odot &= KS\rho_\odot\left(\frac{\Delta_0^2}{\Delta^2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\Delta}\right) \\ \boldsymbol{\Delta} &= \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' \end{aligned}\right\} \tag{4.162}$$

这里 $\boldsymbol{r}'$ 即摄动天体 m' 的位置矢量，$\rho_\odot$ 是对应 $\Delta=\Delta_0$ 处的光压强度。

上述两种情况均表明，光压力实为一种中心斥力，与引力方向相反。若记

$$\mu_\odot=\begin{cases}\left(K\dfrac{S}{m}\right)\rho_\odot r_0^2, & \text{辐射源是中心天体}\\ \left(K\dfrac{S}{m}\right)\rho_\odot \Delta_0^2, & \text{辐射源是摄动天体}\end{cases} \tag{4.163}$$

则(4.161)式和(4.162)式分别变为

$$\boldsymbol{A}_\odot=\frac{\boldsymbol{F}_\odot}{m}=\begin{cases}\dfrac{\mu_\odot}{r^3}\boldsymbol{r}, & \text{辐射源是中心天体}\\ \dfrac{\mu_\odot}{\Delta^3}\boldsymbol{\Delta}, & \text{辐射源是摄动天体}\end{cases} \tag{4.164}$$

这与万有引力的差别是方向相反，且 $\mu=G(M+m)$ 变为 $\mu_\odot$，M 和 m 即中心天体和运动天体的质量。

对于第一种情况，若不考虑其它摄动源的影响，则相应的运动方程应为

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}+\frac{\mu_\odot}{r^3}\boldsymbol{r}\\ &= -(\mu-\mu_\odot)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\end{aligned} \tag{4.165}$$

这与二体问题无实质性差别，解的形式完全相同，唯有系数 μ 改为 $\mu-\mu_\odot$，相应的面积速度公式由

$$n^2a^3=\mu$$

变为

$$n^2a^3=\mu-\mu_\odot \tag{4.166}$$

对于这种情况无需再讨论，因此下面仅讨论第二种情况。

3. 光压摄动加速度和相应的摄动函数

对于辐射源是摄动天体的情况，在太阳系中，人造地球卫星和自然卫星的运动，辐射源就是太阳，相应的光压摄动加速度 $\boldsymbol{A}_\odot$ 实为下列两项之差：

$$\boldsymbol{A}_\odot=\frac{\mu_\odot}{\Delta^3}\boldsymbol{\Delta}-\left(-\frac{\mu'_\odot}{r'^3}\boldsymbol{r}'\right) \tag{4.167}$$

其中

$$\mu'_\odot=\left(K'\frac{S'}{M}\right)\rho_\odot\Delta_0^2$$

K'，S' 都是中心天体对应的值。对于人造地球卫星情况，一个直径为 3m、重为 1t 的球形卫星，

相应的面质比 S/m 要比地球的面质比 S'/M 大得多，有

$$(\frac{S}{m})/(\frac{S'}{M})\approx 10^9$$

因此，人造地球卫星运动中所受到的光压摄动加速度就是(4.167)式右端的第一部分，即

$$\boldsymbol{A}_{\odot}-\frac{\mu_{\odot}}{\Delta^3}\boldsymbol{\Delta} \tag{4.168}$$

太阳系中大小天体(包括自然卫星)的面质比相对而言都很小，所承受的光压力已小到当今测量精度无法反映的程度，故除人造地球卫星外，对太阳系大体的运动都未曾考虑过光压摄动问题。但对其它恒星系统，是否要考虑这一问题，将取决于辐射强度和运动天体的面质比大小。

与摄动加速度 $\boldsymbol{A}_{\odot}$ 对应的摄动函数 R 为

$$R=-\frac{\mu_{\odot}}{\Delta} \tag{4.169}$$

与上一节考虑第三体摄动类似，有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}=(r^2+r'^2-2rr'\cos\psi)^{-1/2}=\dfrac{1}{r'}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\dfrac{r}{r'})^k P_k(\cos\psi)\\ \cos\psi=(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r})\cdot(\dfrac{\boldsymbol{r}'}{r'})\end{cases}$$

于是 R 可表示为

$$R=-\frac{\mu_{\odot}}{r'}[\frac{r}{r'}\cos\psi+\frac{r^2}{r'^2}(\frac{3}{2}\cos^2\psi-\frac{1}{2})+O(\frac{r^3}{r'^3})] \tag{4.170}$$

其中右端第一大项对应的摄动加速度即

$$\frac{\mu_{\odot}}{r'^3}\boldsymbol{r}'$$

与(4.168)式相比，即以 $\boldsymbol{r}'$ 代替了 $\boldsymbol{\Delta}$，也就是略去了太阳视差项，对一般精度要求，这种考虑是完全可以的。而(4.170)式右端的第二大项正是视差项的反映，该项在人卫精密定轨中是要考虑的。对近地卫星而言，这样略去的 $(\frac{r}{r'})^3$ 项与第一大项之比为 $(\frac{r}{r'})^2=0(10^{-8})$，一般情况下已无需考虑，因此，作为对光压摄动的研究，相应的摄动函数可写成如下形式：

$$R=-\frac{\mu_{\odot}}{r'}[(\frac{r}{r'})\cos\psi+(\frac{r}{r'})^2(\frac{3}{2}\cos^2\psi-\frac{1}{2})] \tag{4.171}$$

若习惯采用摄动加速度来讨论光压摄动，那么需要给出 $\boldsymbol{A}_{\odot}$ 的 S,T,W 分量。三个方向的单位矢量分别记作 $\hat{r},\hat{\theta}$ 和 $\hat{R}$，有

$$\left.\begin{aligned}S&=\frac{\mu_{\odot}}{\Delta^3}(\boldsymbol{\Delta}\cdot\hat{r})=-\mu_{\odot}\frac{r'}{\Delta^3}(A\cos f+B\sin f)+\mu_{\odot}\frac{r}{\Delta^3}\\ T&=\frac{\mu_{\odot}}{\Delta^3}(\boldsymbol{\Delta}\cdot\hat{\theta})=-\mu_{\odot}\frac{r'}{\Delta^3}(-A\sin f+B\cos f)\\ W&=\frac{\mu_{\odot}}{\Delta^3}(\boldsymbol{\Delta}\cdot\hat{R})=-\mu_{\odot}\frac{r'}{\Delta^3}C\end{aligned}\right\} \tag{4.172}$$

这里用到

$$\hat{r}'\cdot\hat{r}=\cos\psi=A\cos f+B\sin f$$

A 和 B 即由(4.72)和(4.73)式表达，但现在第三体就是太阳，对于人造地球卫星而言，x 轴方

向即春分点方向，因此，原 A,B 中的 i',Ω' 和 θ 实为

$$i'=\epsilon,\quad \Omega'=0,\quad \theta=\Omega \tag{4.173}$$

ϵ 即黄赤交角。除 A 和 B 外，C 的表达式如下：

$$\begin{aligned}C=&\sin i[\sin(\Omega-u')+\sin(\Omega+u')]\\&+\sin i\cos\epsilon[\sin(\Omega-u')-\sin(\Omega+u')]\\&+\cos i\sin\epsilon[\sin u']\end{aligned} \tag{4.174}$$

4. **摄动函数的分解**

对于卫星的运动，坐标系即取中心天体的赤道坐标系。仍用摄动函数来讨论问题，将 $\cos\psi$ 的表达式代入(4.171)式得

$$\begin{aligned}R=&\beta_1 a(\frac{r}{a})[A\cos f+B\sin f]\\&+\frac{3}{2}\beta_2 a^2(\frac{r}{a})^2[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(A^2+B^2)+\frac{1}{2}(A^2-B^2)\cos 2f+AB\sin 2f]\end{aligned} \tag{4.175}$$

其中

$$\beta_1=-\mu_{\odot}/r'^2,\quad \beta_2=-\mu_{\odot}/r'^3 \tag{4.176}$$

(4.175)式的第二部分与上一节第三体摄动的形式(4.75)完全相同，只是那里由(4.76)式表达的系数 β 换成现在的 β_2。

由平均值

$$\overline{(\frac{r}{a})\cos f}=-\frac{3}{2}e,\quad \overline{(\frac{r}{a})\sin f}=0 \tag{4.177}$$

即可将 R 分解为三个部分：

$$R=R_c+R_l+R_s \tag{4.178}$$

其中 β_2 部分与上一节相同，不再列出，而 β_1 部分为

$$R_c=0 \tag{4.179}$$

$$R_l=\beta_1 aA(-\frac{3}{2}e) \tag{4.180}$$

$$R_s=\beta_1 a[A(\frac{r}{a}\cos f+\frac{3}{2}e)+B(\frac{r}{a})\sin f] \tag{4.181}$$

5. **光压摄动解**

以人造地球卫星的运动为例，对于面质比不太大的近地卫星，例如直径为 3m、重 1t 的球形卫星，光压摄动相对地球扁率(即 J_2 项)摄动为二阶小量，即相应的光压摄动加速度与地球中心引力加速度之比为

$$\begin{aligned}\epsilon=&|\boldsymbol{A}_{\odot}|/|\boldsymbol{F}_0|\\=&K(\frac{S}{m})\rho_{\odot}r^2/\mu\leqslant 10^{-7}=O(J_2^2)\end{aligned} \tag{4.182}$$

其中，$\mu=GM$，M 是地球质量，这对应光压摄动的第一部分(即 β_1 部分)。而第二部分(即 β_2 部分)就更小，其摄动量级为 10^{-11}，其解已由上一节给出，只需将那里的 β 换成 β_2 即可。下面讨论 β_1 部分的摄动解。

将(4.180)和(4.181)式表达的 R_l 和 R_s 代入($\partial R/\partial\sigma$)型的摄动运动方程,即得

$$\dot{\sigma}=f_0(a)+f_1(\sigma;J_2)+f_2(\sigma,t;\beta_1) \tag{4.183}$$

其中仅与光压有关的部分为

$$f_2(\sigma,t;\beta_1)=f_{2l}(\sigma,t;\beta_1)+f_{2s}(\sigma,t;\beta_1) \tag{4.184}$$

右函数显含 t 表示包含太阳的坐标,是 t 的已知函数。相应的摄动解为

$$\sigma_l^{(1)}(t)=\int^t[f_{2l}+\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)})_j]_\sigma dt \tag{4.185}$$

$$\sigma_s^{(2)}(t)=\int^t(f_{2s})_\sigma dt \tag{4.186}$$

其中 f_{1c} 即 J_2 部分。对 $M_s^{(2)}(t)$,右端被积函数中还有一项:

$$\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(2)}(t)$$

积分后,$\sigma_l^{(1)}(t)$的直接部分(对应 f_{2l})为

$$a_l^{(1)}(t)=0 \tag{4.187}$$

$$e_l^{(1)}(t)=(\frac{3\beta_1}{8\mu})na^2\sqrt{1-e^2}[(1-\cos i)G_1+(1+\cos i)G_2+2\sin iG_3] \tag{4.188}$$

$$i_l^{(1)}(t)=(\frac{3\beta_1}{8\mu})na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}[\sin iG_1+\sin iG_2-2\cos iG_3] \tag{4.189}$$

$$\Omega_l^{(1)}(t)=-(\frac{3\beta_1}{8\mu})na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}\sin i}[\sin iG_4-\sin iG_5+2\cos iG_6] \tag{4.190}$$

$$\begin{aligned}\omega_l^{(1)}(t)=&-\cos i\Omega_l^{(1)}(t)\\&-(\frac{3\beta_1}{8\mu})na^2\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(1-\cos i)G_4+(1+\cos i)G_5+2\sin iG_6]\end{aligned} \tag{4.191}$$

$$M_l^{(1)}(t)=(\frac{3\beta_1}{8\mu})na^2\frac{1+e^2}{e}[(1-\cos i)G_4+(1+\cos i)G_5+2\sin iG_6] \tag{4.192}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}G_1&=(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega+u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega-u')/n_2\\G_2&=(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega-u')/n_3+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega+u')/n_4\\G_3&=\sin\varepsilon[\cos(\omega-u')/n_5-\cos(\omega+u')/n_6]\end{aligned}\right\} \tag{4.193}$$

$$\left.\begin{aligned}G_4&=(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')/n_1+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')/n_2\\G_5&=(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')/n_3+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')/n_4\\G_6&=\sin\varepsilon[\sin(\omega-u')/n_5-\sin(\omega+u')/n_6]\end{aligned}\right\} \tag{4.194}$$

$$\left.\begin{aligned}&n_1=\omega_1-\Omega_1+n',n_2=\omega_1-\Omega_1-n',n_3=\omega_1+\Omega_1-n'\\&n_4=\omega_1+\Omega_1+n',n_5=\omega_1-n',\quad n_6=\omega_1+n'\end{aligned}\right\} \tag{4.195}$$

Ω_1 和 ω_1 是 J_2 项摄动的一阶长期系数,见上一章公式(3.65)和(3.66)式,而 n' 是太阳的平运动速度,即平黄经的变率。

$\sigma_l^{(1)}(t)$的间接部分

$$\int^t[\frac{\partial f_{1c}}{\partial e}e_l^{(1)}+\frac{\partial f_{1c}}{\partial i}i_l^{(1)}]_\sigma dt$$

不再具体列出。

$\sigma_s^{(2)}(t)$的表达式如下:

$$a_s^{(2)}(t)=2(\frac{\beta_1}{\mu})a^3[A(\cos E+\frac{1}{2}e)+B\ \sqrt{1-e^2}\sin E] \qquad (4.196)$$

$$e_s^{(2)}(t)=(\frac{\beta_1}{\mu})a^2\ \sqrt{1-e^2}[\sqrt{1-e^2}A(\frac{1}{4}\cos 2E)+B(-\frac{e}{2}\sin E+\frac{1}{4}\sin 2E)] \qquad (4.197)$$

$$i_s^{(2)}(t)=\frac{1}{4}(\frac{\beta_1}{\mu})a^2/\sqrt{1-e^2}[\sqrt{1-e^2}((\cos E+\frac{e}{2})-\frac{e}{4}\cos 2E)H_1$$
$$-((1-\frac{e^2}{2})\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E)H_2] \qquad (4.198)$$

$$\Omega_s^{(2)}(t)=\frac{1}{4}(\frac{\beta}{\mu})a^2/(\sqrt{1-e^2}\sin i)[((1-\frac{e^2}{2})\sin E-\frac{e}{4}\sin 2E)H_1$$
$$+\sqrt{1-e^2}((\cos E+\frac{e}{2})-\frac{e}{4}\cos 2E)H_2] \qquad (4.199)$$

$$\omega_s^{(2)}(t)=-\cos i\Omega_s^{(2)}(t)$$
$$+(\frac{\beta_1}{\mu})a^2/e[\sqrt{1-e^2}A(-\frac{e}{2}\sin E+\frac{1}{4}\sin 2E)+B(e(\cos E+\frac{e}{2})-\frac{1}{4}\cos 2E)] \qquad (4.200)$$

$$M_s^{(2)}(t)=-(\frac{\beta_1}{\mu})a^2/e\{A[(\frac{3}{2}e-2e^3)\sin E+(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}e^2)\sin 2E]$$
$$-\sqrt{1-e^2}B[4e(\cos E+\frac{e}{2})+\frac{1}{4}(1-5e^2)\cos 2E]\} \qquad (4.201)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}H_1=&\sin i[(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega+u')+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega-\Omega-u')]\\&-\sin i[(1+\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega-u')+(1-\cos\varepsilon)\cos(\omega+\Omega+u')]\\&+2\cos i\sin\varepsilon[\cos(\omega-u')-\cos(\omega+u')]\\H_2=&\sin i[(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega+u')+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega-\Omega-u')]\\&-\sin i[(1+\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega-u')+(1-\cos\varepsilon)\sin(\omega+\Omega+u')]\\&+2\cos i\sin\varepsilon[\sin(\omega-u')-\sin(\omega+u')]\end{aligned}\right\} \qquad (4.202)$$

6. 地影的存在和卫星轨道半长径的增大现象

对于各种卫星的运动，往往会遇到"蚀"现象，即从卫星上看，太阳被中心天体所掩。对人造地球卫星而言，即进入地影，严格来说，有本影和半影之分，甚至还要考虑大气消光的影响和月影的问题，在人卫精密定轨中，往往是有必要这样考虑问题的，读者可参看有关文献。

若地影存在，尽管光压力的变化仍然是一个连续过程，但从对卫星轨道影响的角度来看，光压力实为一"间断"力，前面给出的结果将有变化。对于一般精度要求，可作简单处理，即求出卫星每圈出、进地影的位置，对应 E_0 和 E_1，由此作地影修正。引进地影(或"蚀")因子 ν:

$$\nu=1-\frac{\widehat{E_1E_0}}{2\pi} \qquad (4.203)$$

这里$\widehat{E_1E_0}$是卫星在地影内的运行弧段。因此，前面求出的长周期项 $\sigma_l^{(1)}(t)$应改为长周期变化，即

$$\Delta\sigma=\nu[\sigma_l^{(1)}(t)-\sigma_l^{(1)}(t_0)] \qquad (4.204)$$

而短周期项 $\delta_s^{(2)}(t)$却不能这样处理，因为此时短周期项的性质发生了变化。在有地影的情况下，它已失去了周期性，或者说它转化成长周期项(周期相当长，它取决于卫星、地球和太阳三

者之间的相对位置)，相应的计算公式改为

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2\pi}[\sigma_s^{(2)}(E_1)-\sigma_s^{(2)}(E_0)]n(t-t_0) \tag{4.205}$$

而且，原 $\sigma_s^{(2)}(t)$ 中有两处要改变，即

(1) $(\cos E+\frac{e}{2})$ 改为 $\cos E$。

(2) ΔM 分成两部分：ΔM_1 和 ΔM_2，其中 $\Delta M_1=[M_s^{(2)}(E_1)-M_s^{(2)}(E_0)]$ 对应积分 $\int^t (f_{2s})_\sigma \mathrm{d}t$，有

$$M_s^{(2)}(t)=-(\frac{\beta_1}{\mu})a^2/e\{A[-\frac{e}{2}(3+e^2)\sin E+\frac{1}{4}(1-3e^2)\sin 2E] \\ -\sqrt{1-e^2}B[e(\cos E+\frac{e}{2})+\frac{1}{4}(1-2e^2)\cos 2E]\} \tag{4.206}$$

ΔM_2 由 $\frac{\partial n}{\partial a}a_s^{(2)}(t)$ 产生，有

$$\Delta M_2=\frac{1}{2}(-\frac{3}{2a}\Delta a)n(t-t_0) \tag{4.207}$$

其中 Δa 即由(4.205)式计算的结果。

关于出、进地影位置的计算，即如何给出 E_0 和 E_1？则涉及到地影方程的求解，而地影方程可采用简单的柱形地影，或较精确的锥形地影，甚至更复杂的模型，请读者参看本章参考文献[1]第九章和有关文献。

正是由于地影的存在，卫星轨道半长径 a 的变化性质发生了明显的改变，短周期变化转化为长周期变化，而且周期相当长，即(4.205)式关于 a 的部分 $[a_s^{(2)}(E_1)-a_s^{(2)}(E_0)]$ 要经历很长时间才会变号，这就导致某些人造地球卫星在运动过程中，即使有耗散力(大气阻尼作用)的影响，轨道半长径也有增大的可能。因此，尽管光压力也是一种保守力(即中心斥力)，但由于地影的存在，导致“间断”情况的发生，而使摄动效应不同于一般保守力。

4.4 阻尼效应

在星际空间中，天体运动往往受到星际物质的阻尼作用，特别是卫星(包括人造卫星)在各大行星的大气层中运动，其阻尼效应比较明显。对于人造地球卫星，大气阻尼的影响往往对其在轨道上存在的“寿命”起决定性作用，特别是那些面质比较大的卫星。

1. 气动力及其有关问题

飞行器在大气层中飞行的受力状况相当复杂，它是气体动力学的一个主要研究内容。但是对于卫星运动问题，所涉及到的大气可以看作自由分子流(除人造地球卫星最后的陨落阶段)，卫星在自由分子流中所受的气动力作用可归结为大气阻力，阻力加速度由下式表达：

$$\boldsymbol{D}=-\frac{1}{2}(\frac{C_D S}{m})\rho V\boldsymbol{V} \tag{4.208}$$

其中 C_D 是阻力系数，S/m 是卫星的面质比(S 是对阻力而言的有效截面积)，ρ 是卫星所在空

间处的大气密度，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_a$ 是卫星相对大气的速度矢量，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_a$ 分别为卫星和大气相对行星质心的速度矢量。对于地球卫星，通常取 $C_D=2.2$。

关于大气密度 ρ，严格说来，它是空间和时间的函数[1]，即

$$\rho=\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{4.209}$$

随时间 t 的变化主要是受太阳辐射的影响，其变化规律至今并未被人们完全掌握，本书将不去讨论这些细节，而采用近似模式来讨论耗散因素对卫星轨道的影响，并给出相应的轨道变化规律。为此，将采用下面两种简单模式：

(1)静止球形大气模式。这是针对各种卫星的运动状况所考虑的，该模式是行星大气的一种最简单的静态平均模式，它可反映大气阻力摄动的主要特征。相应的密度分布为指数形式，即

$$\rho=\rho_0\exp\left(-\frac{r-r_0}{H}\right) \tag{4.210}$$

其中 H 为密度标高，ρ_0 是 $r=r_0$ 处的密度。

(2)等密度模式。天体在"稀薄"的星际物质中的运动，可采用这种最简单的近似模式。

2. 静止大气对应的阻力摄动运动方程

对于静止大气，$\boldsymbol{v}_a=0$，相应的阻力加速度公式为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=-\frac{1}{2}\left(\frac{C_DS}{m}\right)\rho v^2\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right)\\ v^2&=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)=\mu\frac{(1+2e\cos f+e^2)}{a(1-e^2)}\rho\end{aligned}\right\} \tag{4.211}$$

其中 $\mu=GM_0$，M_0 是中心天体的质量。显然，在这种情况下，阻力加速度只有切向分量，即

$$\left.\begin{aligned}U&=-\frac{1}{2}\left(\frac{C_DS}{m}\right)\rho v^2=-\mu\left(\frac{A}{2}\right)\frac{(1+2e\cos f+e^2)}{a(1-e^2)}\rho\\ N&=0\\ W&=0\end{aligned}\right\} \tag{4.212}$$

其中 $A=\left(\frac{C_DS}{m}\right)$。

将大气阻力加速度 U 代入相应的摄动运动方程(2.33)，得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=-\frac{Ana^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{3/2}\rho\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}&=-\frac{Ana}{(1-e^2)^{1/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(\cos f+e)\rho\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}&=0\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=0\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}&=-\frac{Ana}{e(1-e^2)^{1/2}}\sin f(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\rho\\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)\Delta a+\frac{Ana}{e(1-e^2)}\left(\frac{r}{a}\right)\sin f(1+e\cos f+e^2)(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}\rho
\end{aligned}\right\}\tag{4.213}
$$

由此还可给出近星距 $r_p=a(1-e)$ 的变化率，即

$$
\frac{\mathrm{d}r_p}{\mathrm{d}t}=-\frac{Ana^2}{(1-e^2)^{3/2}}(1+2e\cos f+e^2)^{1/2}(1-\cos f)(1-e)^2\rho\leqslant 0 \tag{4.214}
$$

从上述摄动运动方程得知，在静止大气阻力影响下，运动天体的轨道面不变，而半长径 a 和近星距 r_p 都在不断减小。虽然 $\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ 右端因子 $(\cos f+e)$ 并不恒大于零，但后面将会从平均效应得知，e 亦是减小的。这就表明，阻力摄动效应的主要特点是使运动天体的轨道不断变小变圆，此即在阻尼作用下，轨道能量耗散的一种表现。

3. 静止球形大气对应的阻力摄动解

为了求摄动解的需要，密度表达式(4.210)可改用轨道根数的形式：

$$
\rho=k\exp(z\cos E) \tag{4.215}
$$

其中

$$
z=\frac{ae}{H} \tag{4.216}
$$

$$
k=\rho_{p_0}\exp\left[-\frac{1}{H}(a-a_0+a_0e_0)\right] \tag{4.217}
$$

这里 ρ_{p_0} 是初始近星点处的密度，对应 $r_{p_0}=a_0(1-e_0)$，k 可近似地看作常数，它所涉及的 $\Delta a=a-a_0$ 可取平均值。

由于密度 ρ 采用了指数模式，且引进了偏近点角 E，因此在分解摄动运动方程(4.213)式的右函数时，必须将右函数也表示成偏近点角的形式。为此，利用

$$
r\cos f=a(\cos E-e),\quad r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E
$$
$$
r=a(1-e\cos E)
$$

就可将方程(4.213)变为 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}E$ 的形式，取到 $O(e)$ 项为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}E}=-Aa^2(1+2e\cos E)\rho\\
&\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}E}=-Aa(\frac{e}{2}+\cos E+\frac{e}{2}\cos 2E)\rho\\
&\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}E}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}E}=0\\
&\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}=-Aa[\frac{1}{e}(1+\frac{1}{8}e^2)\sin E+\frac{1}{2}\sin 2E+\frac{1}{8}e\sin 3E-\frac{1}{2}e\sin E]\rho\\
&\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}E}=Aa[\frac{1}{e}(1+\frac{1}{8}e^2)\sin E+\frac{1}{2}\sin 2E+\frac{1}{8}e\sin 3E]\rho
\end{aligned}\right\}\qquad(4.218)
$$

其中原$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$右端第一大项$(\frac{\partial n}{\partial a}\Delta a)$不必列入，在给出摄动解时补上。原方程右函数 f 的平均值 $\bar{f}$ 应为

$$
\bar{f}=\frac{1}{T}\int_0^T(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t=\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E})\mathrm{d}E \qquad (4.219)
$$

而这里的被积函数$(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E})$即由

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E}=(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t})\frac{1}{n}(\frac{r}{a})
$$

导出，此即上述方程(4.218)。

通常，阻力摄动加速度较小，例如一个直径为 3m 重 1t 的近地球形卫星，在 200km 高处飞行，相应的大气密度约为 $10^{-10}\mathrm{kg/m^3}$，相应的阻力加速度 D 与地球中心引力加速度 F_0 之比为

$$
\frac{D}{F_0}=O(10^{-6})
$$

而一般飞行高度还要高些，阻力摄动就更小。通常把阻力摄动看作二阶小量，相应的摄动解为

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_2(t-t_0)=\bar{f}(t-t_0)\\
&\sigma_s^{(2)}(t)=\int^t(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t=\int^E(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E})\mathrm{d}E
\end{aligned}\right\}\qquad(4.220)
$$

无论是求平均值 $\bar{f}$，还是求 $\sigma_s^{(2)}(t)$，均涉及到下列积分：

$$
\left.\begin{aligned}
&\int\sin mE\exp(z\cos E)\mathrm{d}E\\
&\int\cos mE\exp(z\cos E)\mathrm{d}E
\end{aligned}\right\}\qquad(4.221)
$$

由指数函数的展开式和 $\sin^\alpha E$，$\cos^\alpha E$（α 是正整数）表达成 E 的倍角函数公式，可给出

$$
\exp(z\cos E)=\sum_{\alpha\geqslant 0}\sum_{\beta=0}^{\frac{1}{2}(\alpha_1-\delta_1)}(\frac{z^\alpha}{\alpha_1})\frac{1}{2^{\alpha-\delta_2}}\binom{\alpha}{\beta}\cos(\alpha-2\beta)E \qquad (4.222)
$$

其中

$$
\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}
$$

$$
\delta_1=\frac{1}{2}[1-(-1)^\alpha],\quad \delta_2=\begin{cases}0,\alpha-2\beta=0\\1,\alpha-2\beta\neq 0\end{cases} \qquad (4.223)
$$

于是有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin mE\exp(z\cos E)\mathrm{d}E = 0 \tag{4.224}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos mE\exp(z\cos E)\mathrm{d}E = \sum_{\alpha(2)\geqslant m}\frac{1}{\left[\frac{1}{2}(\alpha - m)\right]!\left[\frac{1}{2}(\alpha + m)\right]!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}$$

$$= \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!\ (m+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k} = I_m(z) \tag{4.225}$$

$I_m(z)$即第一类虚变量的贝塞耳函数。上述求和中$\alpha(2)\geqslant m$表示α从m开始取值，且“步长”为2。求短周期项时涉及的两个积分结果为

$$\int^{E}\sin mE\exp(z\cos E)\mathrm{d}E$$

$$= \sum_{\alpha\geqslant 0}\sum_{\beta=0}^{\frac{1}{2}(\alpha-\delta_1)}\left(\frac{z^{\alpha}}{\alpha!}\right)\frac{1}{2^{\alpha+1-\delta_2}}\binom{\alpha}{\beta}\left[\delta_3\frac{\cos(\alpha-2\beta-m)E}{\alpha-2\beta-m} - \frac{\cos(\alpha-2\beta+m)E}{\alpha-2\beta+m}\right] \tag{4.226}$$

$$\int^{E}\cos mE\exp(z\cos E)\mathrm{d}E$$

$$= \sum_{\alpha\geqslant 0}\sum_{\beta=0}^{\frac{1}{2}(\alpha-\delta_1)}\left(\frac{z^{\alpha}}{\alpha!}\right)\frac{1}{2^{\alpha+1-\delta_2}}\binom{\alpha}{\beta}\left[\delta_3\frac{\sin(\alpha-2\beta-m)E}{\alpha-2\beta-m} + \frac{\sin(\alpha-2\beta+m)E}{\alpha-2\beta+m}\right] \tag{4.227}$$

其中

$$\delta_3 = \begin{cases}0, & \alpha-2\beta-m=0\\ 1, & \alpha-2\beta+m\neq 0\end{cases} \tag{4.228}$$

有了上述积分表达式，就很容易给出二阶短周期项$\sigma_s^{(2)}(t)$，积分结果是以E作为引数的，它对应时刻t的平均根数$\bar{e},\bar{M}$，即$E=\bar{E}(\bar{e},\bar{M})$。

通常只需要给出阻力摄动的长期项$\sigma_2(t-t_0)$，相应的系数σ_2的具体表达式为

$$a_2 = -Aka^2n[I_0(z)+2eI_1(z)] \tag{4.229}$$

$$e_2 = -Akan\left[\frac{e}{2}I_0(z)+I_1(z)+\frac{e}{2}I_2(z)\right] \tag{4.230}$$

$$i_2 = 0 \tag{4.231}$$

$$\Omega_2 = 0 \tag{4.232}$$

$$\omega_2 = 0 \tag{4.233}$$

$$M_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2a}\right)a_2(t-t_0) \tag{4.234}$$

4. 等密度模式对应的阻力摄动解

因$\rho=\text{const}$。由方程(4.218)不难看出，摄动解的形式很简单，长期项表达式为

$$\left.\begin{aligned}
a_2(t-t_0) &= -Aa^2\rho n(t-t_0)\\
e_2(t-t_0) &= -Aa\left(\frac{e}{2}\right)\rho n(t-t_0)\\
M_2(t-t_0) &= \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{3n}{2a}\right)a_2(t-t_0)\right](t-t_0)
\end{aligned}\right\} \tag{4.235}$$

短周期项 $\sigma_s^{(2)}(t)$ 的形式亦不复杂，均由偏近点角 E 的三角函数组成。

5. 阻力摄动效应的特征

上述摄动解的结果，证实了在耗散力作用下运动天体轨道的偏心率 e 和半长径 a 一样，也是不断减小的。

由于 a 和 e 有长期项，那么根据平均根数法构造的级数解，就不像保守力摄动那样简单了，长期项将从某一阶开始，由 $(t-t_0)$ 的线性形式变成幂形式，并且还要出现泊松项。这是各种摄动法都不可避免的耗散力摄动的一种固有性质。

参 考 文 献

[1]刘林,《人造地球卫星轨道力学》,高等教育出版社,1992。

[2]章圣泮,刘林,天文学报,23(1982),185～197。CAA,6(1982),233～242。

第五章 后牛顿效应

5.1 问题的提出与后牛顿加速度

牛顿引力理论是天体力学的基础，从天体力学诞生以来，人们一直用牛顿引力理论去研究天体的运动，前面各章也是在这种框架下讨论各类天体运动的。本世纪60年代以来，随着测量技术（射电干涉测量和激光测距）的发展，观测精度已大大提高，测距精度已达厘米级，测角精度已达毫秒级，而且还有提高的趋势，以牛顿力学为基础的天体力学理论已不能适应这种高精度的要求，必须以新的引力理论对其加以修正。这里只是说修正，其原因是：到目前为止，在天体力学领域（或与其有关的领域）的各类问题中所涉及的新引力理论，主要是如何给出相应的引力场中，一个实验质点的运动微分方程，它虽然不同于牛顿引力场中的形式，但其差别只是一些微小的修正项。在此情况下讨论天体力学问题，无论从定量角度还是从定性角度来看，研究方法均无实质性改变，天体力学主要还是在数学和非线性力学的影响下向前发展。

新引力理论对牛顿引力理论的修正，在天体力学范畴内将涉及到参考系、观测资料处理和天体运动方程的精化等问题。关于前两个内容可参看有关文献，本书将从"方法"这一角度讨论运动方程的改变对天体运动的影响。由于运动方程的修正项较小，因此相当于增加一个摄动源。通常将运动方程中的这种对牛顿力学的修正项称为后牛顿(Post-Newtonian)加速度，由此导致的天体运动的变化，即后牛顿效应。

关于运动方程中的后牛顿加速度，各种引力理论所给出的结果是有差别的。对于天体 m_2 相对 m_1 的运动，由参数化的后牛顿(PPN)理论[1~3]给出的只考虑一阶后牛顿项的运动方程为

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}=&-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\&+\frac{\mu}{r^2}\left[\frac{\mu}{c^2r}(\alpha_1+\alpha_2\beta)-\frac{v^2}{c^2}(\alpha_3+\alpha_4\beta)+\alpha_5\beta\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right]\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\&+\frac{\mu}{r^2}\left[\frac{\dot{r}v}{c^2}(\alpha_6-\alpha_7\beta)\right]\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{v}\right)\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\mu=G(m_1+m_2),\quad \beta=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\\&v^2=\dot{\boldsymbol{r}}^2,\quad \dot{r}=\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

方程(5.1)中的 c 为光速，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_7$ 为参数，不同的引力理论有不同的值。方程右端的第一项

即牛顿项，而第二和第三项就是后牛顿项，这两种后牛顿项只有 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 方向的分量，即径向和切向(即速度方向)分量。因此，考虑后牛顿效应的二体问题仍对应一平面运动，而且相应的力学系统仍是可积系统，下一节将给出它的完全解。

目前常采用的引力理论还是爱因斯坦(Einstein)广义相对论，与运动方程(5.1)对应的形式为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) + \frac{\mu}{c^2 r^2}\left[\left(\frac{4\mu}{r} - v^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) + 4(\dot{r}v)\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{v}\right)\right] \tag{5.3}$$

5.2 考虑后牛顿效应的二体问题的完全解

就可积性而言，由基本方程(5.3)可以看出，与经典二体问题的主要差别是右函数中增加了速度项，原动量矩积分不复存在。若仍记

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} \tag{5.4}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = (\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) = \frac{4\mu}{c^2 r^2}\dot{r}\boldsymbol{h} \tag{5.5}$$

显然，这仍对应一平面运动，故可仿照对经典二体问题的讨论方法来讨论考虑后牛顿效应的二体问题。

1. 运动平面的定向与广义动量矩积分

以 m_1 为中心天体，选取 m_1-xyz 坐标系。既然 m_2 相对 m_1 的运动仍为平面运动，那么同样可定义运动天体 m_2 的轨道平面相对基本平面(即 xy 坐标面)的定向根数 i, Ω，于是有

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = h\hat{h} \tag{5.6}$$

其中 $h = |\boldsymbol{h}|$ 是动量矩的大小，$\hat{h}$ 是轨道面法向单位矢量，即

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} \sin\Omega\sin i \\ -\cos\Omega\sin i \\ \cos i \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

由(5.5)式可知，尽管动量矩 $\boldsymbol{h}$ 不能保持，但只是其大小在变，即

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{4\mu}{c^2 r^2}\dot{r}h$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}h}{h} = \left(\frac{4\mu}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

由此给出一积分：

$$h = h_0 \exp\left(-\frac{4\mu}{c^2}/r\right) \tag{5.8}$$

于是有

$$\boldsymbol{h} = h_0 \exp\left(-\frac{4\mu}{c^2}/r\right)\hat{h} \tag{5.9}$$

不妨称其为广义动量矩积分，h_0, i, Ω 即三个积分常数。该积分与经典二体问题的动量矩积分所不同的是动量矩矢量不再保持不变，仅其方向仍旧保持不变。因此接下去的问题，仍可像经典二体问题那样在确定的轨道平面内讨论降阶后的方程。

2. 运动平面内的轨道积分和第六个与时间 t 有关的积分

在轨道平面内引入极坐标(r,θ)，有

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\mu}{r^2}+\frac{\mu}{c^2r^2}\left(\frac{4\mu}{r}-v^2+4\dot{r}\right) \tag{5.10}$$

$$r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})=\frac{4\mu}{c^2r^2}\dot{r}(r\dot{\theta}) \tag{5.11}$$

方程(5.11)有一积分，即前面的积分(5.8)：

$$h=r^2\dot{\theta}=h_0\exp\left(-\frac{4\mu}{c^2}/r\right) \tag{5.12}$$

它与经典二体问题中的面积积分不同，这里面积速度不再是常数。

方程(5.10)式和积分(5.12)式与经典二体问题的相应方程有差别，尽管同为可积的，但积分形式变得比较复杂。本章参考文献[4]和[5]中有具体表达形式和推导过程，这里直接写出后三个积分的基本形式，即

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos B_1(\theta-\omega)}=a(1-e\cos E) \tag{5.13}$$

$$B_2E-e\sin E=B_3\sqrt{\mu}\,a^{3/2}(t-\tau) \tag{5.14}$$

其中

$$B_1=1+O\left(\frac{v^2}{c^2}\right),\quad B_2=1+O\left(\frac{v^2}{c^2}\right),\quad B_3=1+O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{5.15}$$

由于 $B_1\neq1$，故轨道积分(5.13)不再是圆锥曲线。a,e,ω 和 τ 是积分常数，而 a,e 和 h_0 有一定的关系，其中有一个是不独立的，但它们亦不是轨道半长径、偏心率、…，因此，E 也不是偏近点角。

根据上述结果，尽管考虑后牛顿效应的二体问题是可积的，但积分形式却不像经典二体问题那么简单，何况在动力天文中所遇到的力学系统，后牛顿项并不占主要地位，通常是一小项，因此，上述仅考虑后牛顿效应的二体问题解并无实际意义，所阐述的内容，只是让读者了解相应系统的基本特征。从实用角度看，还是把后牛顿项当作相应力学系统的一个摄动源来对待更有实际意义，下面一段即讨论该问题。

5.3 后牛顿效应对应的摄动解

仍采用(5.3)的形式，相应的后牛顿摄动加速度为

$$\boldsymbol{A}_{PN}=\frac{\mu}{c^2r^2}\left[\left(\frac{4\mu}{r}-v^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+4\dot{r}v\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{v}\right)\right] \tag{5.16}$$

显然有

$$\varepsilon=|A_{PN}|/(\frac{\mu}{r^2})=O(\frac{v^2}{c^2}) \tag{5.17}$$

在太阳系中，水星绕日运动和人造卫星绕地球运动，这一摄动量级分别为 10^{-8}和 10^{-9}。对水星运动而言，后牛顿项相对其它天体的引力摄动是不太小的，而对人造地球卫星（确切地说是指近地卫星）的运动，后牛顿项相对地球扁率摄动仅为三阶小量。

对于行星绕日运动和人造卫星绕地球运动两种力学系统，上述后牛顿摄动加速度的形式相同，对于前者，有 $\mu=G(m_1+m_2)$，m_1 即太阳质量，m_2 即运动天体的质量，而对于后者，通常可简化为 $\mu=GE$，E 为地球质量。虽然讨论两者采用的坐标系的基本平面（即 xy 坐标面）各不相同，前者是黄道面，而后者是地球赤道面，但只要对 i，Ω 两根数作不同的理解即可，因此可作为同一问题来讨论。

由 $\boldsymbol{r}$、$\dot{\boldsymbol{r}}$ 与轨道根数之间的关系可知，用径向、横向和轨道面法向三个分量表达的形式为

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e\sin f\ \sqrt{\mu/p} \\ (1+e\cos f)\ \sqrt{\mu/p} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

其中 $p=a(1-e^2)$。由此可得 A_{PN}的 S,T,W 三分量为

$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{\mu^2}{c^2a^3}[-3(\frac{a}{r})^2+10(\frac{a}{r})^3-4(1-e^2)(\frac{a}{r})^4] \\ T&=\frac{\mu^2}{c^2a^3}[4e(\frac{a}{r})^3\sin f] \\ W&=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

将其代入相应的摄动运动方程(2.32)，即得

$$\dot{\sigma}=f_0(a)+f_{PN}(\sigma,\varepsilon) \tag{5.20}$$

这里的后牛顿项 f_{PN}只有长期部分和短周期部分，即

$$f_{PN}=f_c(a,e)+f_s(a,e,M) \tag{5.21}$$

积分后给出摄动解的长期项和短周期项，具体表达式如下：

$$\left.\begin{aligned} a_c(t-t_0)&=0, \qquad & e_c(t-t_0)&=0 \\ i_c(t-t_0)&=0, \qquad & \Omega_c(t-t_0)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

$$\omega_c(t-t_0)=(\frac{\mu}{c^2})\frac{3}{p}n(t-t_0) \tag{5.23}$$

$$M_c(t-t_0)=-(\frac{\mu}{c^2})\frac{3}{p}(1-e^2)^{-1}(3+\frac{7}{2}e^2+e^4)n(t-t_0) \tag{5.24}$$

$$a_s(t)=-(\frac{\mu}{c^2})(1-e^2)^{-2}[(14+6e^2)e\cos f+5e^2\cos 2f] \tag{5.25}$$

$$e_s(t)=-(\frac{\mu}{c^2})\frac{1}{p}[(3+7e^2)\cos f+\frac{5}{2}e\cos 2f] \tag{5.26}$$

$$i_s(t)=0 \tag{5.27}$$

$$\Omega_s(t)=0 \tag{5.28}$$

$$\omega_s(t)=(\frac{\mu}{c^2})\frac{1}{p}[3(f-M)-(\frac{3}{e}-e)\sin f-\frac{5}{2}\sin 2f] \tag{5.29}$$

$$M_s(t)=-(\frac{\mu}{c^2})\frac{1}{p}\sqrt{1-e^2}[3e(\frac{r}{a})\sin f-(\frac{3}{e}+7e)\sin f-\frac{5}{2}\sin 2f] \tag{5.30}$$

上述摄动解清楚地表明后牛顿效应有如下几个特征：

1. 除运动根数(平近点角)M 外，只有近星点角 ω 有长期项，这正是广义相对论的几个论证之一——水星近日点进动的一个依据，即牛顿力学无法解释的水星近日点进动的误差，基本上可由后牛顿效应来修正。

2. 后牛顿效应对天体运动的轨道平面无影响。

3. 后牛顿效应没有长周期摄动影响。

5.4 人造地球卫星运动中的后牛顿效应

在人卫精密定轨中，关于后牛顿加速度，除考虑上述一体效应外，还有测地岁差、自转效应和扁率效应，相应的后牛顿加速度，在满足当前精度的要求下，可写成下列形式：

$$\boldsymbol{A}_{PN}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4 \tag{5.31}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 和 $\boldsymbol{A}_4$ 依次为上述四种后牛顿效应对应的摄动加速度，具体表达式为

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu}{c^2r^2}\left[\left(4\frac{\mu}{r}-v^2\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+(4\dot{r})\boldsymbol{v}\right] \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{A}_2=2(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}) \tag{5.33}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\frac{2\mu}{c^2r^3}\left[\frac{3}{r^2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{J})\right] \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{A}_4=\frac{1}{c^2}\left[-4\nabla\left(\frac{\mu}{r}R\right)+v^2\nabla R-4(\boldsymbol{v}\cdot\nabla R)\boldsymbol{v}\right] \tag{5.35}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Omega}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{Gm_s}{c^2r_s^3}\right)\boldsymbol{h}_s \\ \boldsymbol{h}_s=\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{v}_s\end{cases} \tag{5.36}$$

$$\boldsymbol{J}=J\hat{k},\qquad J=9.8\times10^8\mathrm{m}^2/\mathrm{sec} \tag{5.37}$$

$$\begin{cases}R=-J_2\left(\dfrac{\mu a_e^2}{r^3}\right)\left(\dfrac{3}{2}\sin^2\varphi-\dfrac{1}{2}\right) \\ \sin\varphi=\dfrac{z}{r}\end{cases} \tag{5.38}$$

这里 $\mu=GM$，M 是地球质量；m_s 是太阳质量，$\boldsymbol{r}_s$ 和 $\boldsymbol{v}_s$ 分别为太阳的地心向径和速度矢量，$\boldsymbol{h}_s$ 为常向量，即太阳“绕”地球运动的不变椭圆轨道的面积速度矢量；$\hat{k}$ 是地球赤道面的法向单位矢量；R 即地球非球形引力位的扁率项。

对于 Lageos 卫星，上述四种摄动相对地球中心引力加速度的大小分别为

$$10^{-9},2\times10^{-11},10^{-11},0.5\times10^{-12}$$

而对于 GPS 卫星，则分别为

$$2\times10^{-10},4\times10^{-11},3\times10^{-12},10^{-14}$$

至于它们对卫星轨道影响的特征，以及它们与地球引力位的扁率项的联合效应，在本章参考文献[6]中有详细讨论。特别是地球自转和扁率的后牛顿效应对近地点角 ω 都有长期影响，而除一体效应外，另三种后牛顿效应对轨道平面定向根数之一的升交点赤经 Ω 都有长期影响。

参考文献

[1]Nordtvedt,K. Jr. ,*Phys. Rev.* ,169(1968),1017～1025.

[2]Nordtvedt,K. Jr. and Will,C. M. ,*Ap. J.* 177(1972),775～792.

[3]Will,C. M. ,*Theory and Experiment in Gravitational physics*,Cambridge University Press,1981.

[4]赵长印,紫金山天文台台刊,7(1988),317～329。

[5]Soffel,M. ,*Celest. Mech.* ,40(1987),77～85.

[6]Huang,C. and Liu,L. ,*Celest. Mech.* ,53(1992),172～183.

第六章　小分母问题

6.1　问题的提出

天体运动中将遇到下述几类奇点：

1. 碰撞奇点，即两天体的相互距离 $r \to 0$，此即二体碰撞，还有三体以上的多重碰撞。

2. 对于 N 体系统，在有限时刻天体跑向无穷远，此即非碰撞奇点[1]。

3. 摄动解中出现小分母，当分母小到一定程度，相应的摄动解发散或失效，此即通约奇点。

前两类奇点是天体力学理论研究的重要课题，特别是第一类碰撞奇点，讨论中是假定各天体为不占"空间"的质点，并不是一个实体。尽管讨论这类奇点只是一个数学上的理论问题，但从实用角度来看，消除碰撞奇点的讨论，对数值方法中的步长均匀化还是起着理论指导意义的，详见后面第八章第五节。关于第三类通约奇点，亦是天体力学（甚至一般力学领域）的一个重大问题，通常称为小分母问题。但本书仅从天体力学方法这一角度讨论与其有关的内容。

在第二章第三节中，对受摄二体问题，从摄动运动方程的角度，提到了右函数含有因子 $1/e$ 或 $1/\sin i$ 的问题，这种小分母是由于描述运动天体轨道所选择的变量不当引起的，即 $1/e$ 对应的 ω 和 M 无意义，而 $1/\sin i$ 对应的 Ω 和 ω 不确定，在相应的摄动解中将有体现，这些已在前三章中得到证实。因为仍采用 Kepler 根数 a, e, i, Ω, ω 和 M 作为基本变量，在相应的 ω 和 M 的摄动解中，确实出现 $1/e$ 这种因子，而在 Ω 和 ω 的摄动解中出现了因子 $1/\sin i$。关于这一问题，在 2.3 中也已指出，只要选择适当的变量即可消除这一现象，而且对变量的选择作了详细的讨论，同时给出了相应的无奇点摄动运动方程，因此，这已不是什么问题。通常所说的小分母问题，当然不是指这类小 e 小 i 问题，而是指的通约问题。

关于通约问题，在前面几章用平均根数法给出的摄动解中，这种小分母普遍存在。例如，中心天体非球形引力位的 J_2 项摄动问题，在长周期项 $\sigma_l(t)$ 的分母中无例外地出现因子 $(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)$，当 $i=i_c=63°26'$ 或 $116°34'$ 时，解失效，i_c 即称为临界倾角（简称临界角）。在 J_{22} 项摄动解的分母中出现 $1-\alpha, 1-2\alpha, \cdots$ 这类因子，其中 $\alpha=n_e/n$，n_e 和 n 各为中心天体（或"摄动体"，相当于附着在中心天体上的一种内摄天体）的转动角速率和运动天体的平运动速度，当 $\alpha=1, 1/2, \cdots$ 时，解亦失效。在第三体摄动中，如果 $\frac{r}{r'} \ll 1$，摄动解的分母中有 $\Omega_c - n'$ 这种因子，n' 是摄动天体的平运动速度，当 n' 与运动天体轨道平面的变化速度接近时，相应摄动解亦会出现问题；而当 r 与 r' 相差不大时，摄动天体的真近点角 f' 亦是快变量，应与运动天体的真近点角 f 同时展成相应平近点角的三角级数，那么将会在摄动解的分母中出现 $(k_1 n - k_2 n')$ 这种因子，k_1

和 k_2 是正整数，当 $n/n'=k_2/k_1$ 时，解当然也就失效。类似的小分母还有其它一些形式，不再一一列举。

上述种种通约引起的小分母问题，除第一种临界角问题外，都是摄动天体与运动天体的某种“频率”之间的一种对应。事实上，临界角问题亦是两种“频率”之间的对应，因为 $(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)$ 源于 $\dot{\omega}$，即 ω 的长期项变率 ω_1，见第三章公式(3.66)式，而这一 $\dot{\omega}$ 是 ω 相对升交点方向的变化率，即相对变化率，它是 ω 的绝对变化率 $(\dot{\omega})$ 与升交点变化率（确切地说应是 Ω 的变化率在 ω 变化方向上的反映，即 $\dot{\Omega}\cos i$）之差：

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega} &= (\dot{\omega})-\dot{\Omega}\cos i \\
&= \frac{3J_2}{2p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)
\end{aligned}
$$

因此，$\dot{\omega}=0$ 即

$$
\frac{(\dot{\omega})}{\dot{\Omega}\cos i}=\frac{1}{1}
$$

这就可以看成 ω 与 Ω 变化率之间的一种对应。上述两种频率之间对应导致摄动解中出现小分母，从而在一定程度内使相应的周期项振幅增大和周期变长，而当分母小到一定程度就将使摄动解失效。但是，这类小分母对应的通约奇点，与小 e 小 i 问题截然不同，它不是变量选择问题，对于摄动运动方程而言，上述小分母对应的条件，如 $i=i_c$，也并不是相应方程的奇点，而是常点。那么，这些通约奇点显然是由求解摄动运动方程的方法所引起的。

尽管上述问题是由方法引起的，人们不禁要问，相应的运动是否有“异常”现象？这类由两种频率通约引起的相应周期项振幅的增大与一般力学中的强迫共振有否区别？是否可用某种方法消除这类小分母？为了回答这些问题，必须首先搞清这类通约奇点对应的运动特征。

6.2 通约奇点对应的轨道共振

1. 简化数学模型

对于临界角问题，引进

$$
\left.
\begin{aligned}
L &= \sqrt{a}, & l &= M \\
G &= \sqrt{a(1-e^2)}, & g &= \omega \\
H &= \sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & h &= \Omega
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.1}
$$

此即前面第二章第二节中引进的德洛纳变量（正则共轭变量），但为了方便，这里采用了适当的计算单位使 $\mu=1$。由于 J_2 部分对应的摄动函数 R 不含 Ω，根据正则运动方程(2.41)可知

$$
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0
$$

即存在一积分

$$
H=H_0 \tag{6.2}
$$

而临界角问题又仅出现在长周期项中，那么消除短周期项后，有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0$$

又存在一积分

$$L=L_0 \tag{6.3}$$

于是问题归结为一个自由度系统，即只需讨论(G,g)对应的二维向空间的运动问题。相应的运动方程不难导出，若用后面第七章中的变换方法那就更容易，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}&=-\frac{3J_2^2}{32L^3G^3}(1-16\theta^2+15\theta^4)e^2\sin 2\omega\\ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}&=-\frac{3J_2}{4L^3G^4}(1-5\theta^2)-\frac{3J_2^2}{128L^3G^8}\{(10+36\theta^2-430\theta^4)\\&\quad+e^2(25-126\theta^2+45\theta^4)-(24-192\theta^2+360\theta^4)\sqrt{1-e^2}\\&\quad-[(4-64\theta^2+60\theta^4)+e^2(10-224\theta^2+270\theta^4)]\cos 2\omega\}\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\theta^2&=\cos^2 i=H_0^2/G^2\\ e^2&=1-G^2/L_0^2\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

即$i=i(G)$，$e=e(G)$。因此，动力系统(6.4)实为(G,g)的一个自由度系统，且不显含t，是可积的。该系统可以用来讨论临界角i_c附近的运动性态，从而揭示这类通约奇点对应的运动特征。

与讨论临界角问题类似，对于第三体摄动的内摄情况，我们可以讨论中心天体非球形引力位J_{22}项摄动对应的$n_e/n=1/1$的通约问题。为此引进

$$\left.\begin{aligned}\tilde{L}&=L, & \tilde{l}&=(l+g+h)-S(t)\\ \tilde{G}&=G-\tilde{L}, & \tilde{g}&=g\\ \tilde{H}&=H-\tilde{L}, & \tilde{h}&=h\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

其中$S(t)=S_0+n_e(t-t_0)$，其意义在第四章第一节中已有说明，见公式(4.15)和图4.1。$\tilde{L}$和$\tilde{l}$是一对正则共轭变量，$\tilde{L}$是角动量，$\tilde{l}$是角变量。通常$(l+g+h)$被看作运动天体从x轴起量的“经度”，而$S(t)$即中心天体上对应J_{22}的λ的起量方向X相对x轴的经度(见图4.1)，因此可以把$\tilde{l}$看作运动天体与中心天体上一固定方向之间的会合经度。

根据第四章第一节中的讨论，同时考虑J_2和J_{22}项摄动时，消除普通周期项，仅保留$n_e/n=1/1$对应的通约项后，摄动函数将只包含一个角变量$\tilde{l}$，见公式(4.53)，于是存在两个积分：

$$\tilde{G}=\tilde{G}_0,\qquad \tilde{H}=H_0 \tag{6.7}$$

因此，问题又可归结为一个自由度系统，即$(\tilde{L},\tilde{l})$对应的二维向空间的运动问题，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{L}}{\mathrm{d}t}&=-\frac{3(-J_{22})}{2\tilde{L}^6}(1+\theta)^2\sin 2\tilde{l}\\ \frac{\mathrm{d}\tilde{l}}{\mathrm{d}t}&=(n-n_e)+\frac{3J_2}{2\tilde{L}^3G^4}\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\theta^2\right)(G/\tilde{L})-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\theta^2\right)-\theta\right]\\&\quad+\frac{3J_2^2}{4\tilde{L}^{11}}\left[\frac{1}{4}(5-48\theta^2+133\theta^4)+\frac{1}{2}\theta(4-19\theta^2)\right]\\&\quad+\frac{3(-J_{22})}{\tilde{L}^7}(1+\theta)(1+2\theta)\cos 2\tilde{l}\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&n=\tilde{L}^{-3}\\&\theta=H/G=(\tilde{H}_0+\tilde{L})/(\tilde{G}_0+\tilde{L})\\&G=\tilde{G}_0+\tilde{L}\end{aligned}\right\}\tag{6.9}$$

即 $n=n(\tilde{L}),\theta=\theta(\tilde{L}),G=G(\tilde{L})$。因此，动力系统(6.8)亦为$(\tilde{L},\tilde{l})$的一个自由度系统，且亦不显含 t，同样是可积的。

对于第三体摄动的外摄情况，例如小行星绕太阳运动受木星摄动对应的通约问题，亦可归结为与(6.8)式类似的一个自由度系统，相应的 $\tilde{l}$ 是运动天体（小行星）与摄动天体（木星）之间的某种会合经度，而 $\mathrm{d}\tilde{l}/\mathrm{d}t$ 右端的$(n-n_e)$变为(k_1n-k_2n')，J_{22}将被 m' 代替，m' 是木星质量。

为了讨论方便，根据上述一个自由度对应的运动方程(6.4)式和(6.8)式等形式，不妨把它们写成相应的统一形式：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{y}=B_1(y)\sin 2x\\&\dot{x}=A(y)+B_2(y)\cos 2x\end{aligned}\right\}\tag{6.10}$$

对于临界角通约问题，有

$$y=G,\qquad x=\omega\tag{6.11}$$

对于第三体摄动的通约问题，有

$$y=\tilde{L},\qquad x=\tilde{l}\tag{6.12}$$

由方程(6.4)式和(6.8)式可知，方程(6.10)式中的 $B_1(y),B_2(y)$ 与 $A(y)$之间大小之比，在非通约时，有

$$|B_1(y),B_2(y)|/|A(y)|=O(\varepsilon)\tag{6.13}$$

对于上述临界角问题，$\varepsilon=O(J_2)$，对于第三体摄动问题，$\varepsilon=O(J_{22})$或 $\varepsilon=O(m')$，这里 m' 是以太阳质量为单位的木星质量。方程(6.10)式就是讨论通约奇点附近运动性态的数学模型。

2. 平衡点及其附近的运动性态

当 $2-\frac{5}{2}\sin^2 i=O(J_2)$，即 $1-5\theta^2=O(J_2)$，或 $n-n_e=O(J_2)$或 $k_1n-k_2n'=O(m')$时，将会导致

$$A(y)=0$$

此时，动力系统(6.10)将存在两组平衡解（或称为方程的初等奇点）[2]，即

$$x_1=0,\pi;\qquad y=y_1\tag{6.14}$$

和

$$x_2=\pi/2,3\pi/2;\qquad y=y_2\tag{6.15}$$

其中一组是中心点，另一组是鞍点，至于哪一组是中心，哪一组是鞍点，将取决于方程(6.10)右函数中 $A(y)$，$B_1(y)$和 $B_2(y)$在平衡点处的符号。假定(x_1,y_1)是鞍点，(x_2,y_2)是中心，在中心附近是一条条闭轨线，见图 6.1。

由于中心附近是闭轨线，这说明临界角通约问题中的 ω，第三体摄动中的 $\tilde{l}$ 两个变量的变化被限制在一定范围内，亦即呈摆动状态，这种现象被称为天平动(Libration)，此即通约奇点对应的特殊现象（或称奇异现象），通常称其为轨道共振。

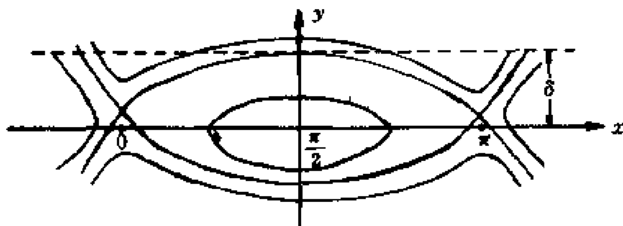


图 6.1　中心与鞍点附近的轨线分布

3. 轨道共振的基本特征

在轨道变化中，由于通约引起了周期项振幅的增大，它类似于一般力学中的强迫共振，故被称为轨道共振，而对应上述简化数学模型的共振称为理想共振[4]。尽管理想共振对应的是简化数学模型，但它已考虑了通约的主项，所揭示的现象，是通约奇点对应的轨道共振的基本特征。这种基本特征并非一般意义下的共振现象，它完全类似于单摆中的振动图像，即上述天平动。在通约奇点附近，共振变量(ω 或 $\tilde{l}$)呈现一种摆动，而相应的 i，e 或 a 的变化亦被“限制”在一定范围内，并不是振幅无限增大。经研究表明，通约奇点对应的轨道共振有如下几个主要特征[1~6]：

(1)通约奇点在力学上对应的是一些平衡点，即中心和鞍点。

(2)通约条件 $i=i_c$，$n=n_c$ 和 $k_1n=k_2n'$ 等只是平衡点的一个必要条件，其是否对应平衡点，还需另一共振变量 ω 或 $\tilde{l}$ 满足相应的条件。

(3)通约现象导致某些轨道根数的变化增大，但增大有一定的范围，即共振带的半宽度 δ(见图 6.1)，其量级为 $O(\mu^{1/2})$。对上述几类通约问题，μ 分别为 e^2J_2，J_{22}和 m'。而在中心附近，振幅较小，甚至达到几乎稳定不变的状态，这与“共振”现象大不相同。

(4)通约导致相应周期项的周期变长，但在共振区域内部，周期又逐渐变短，特别在中心附近(称为深振区)，周期趋于一常数，与振幅无关。

上述特征是在简化模型中得到的，如果考虑被略去的一般周期项或其它摄动因素，相应结论是否完全保持，这就是轨道共振研究的重要课题，读者可参阅本章参考文献[5]及其引用的有关文献。但是上述特征已表明，相应的运动只是具有某些非通约情况不具备的特征，而并无反常之处，这就进一步说明通约奇点并非实质性奇点，采用某些方法消除摄动解中的通约奇点是完全可能的，即为寻找消除通约奇点的分析方法(构造级数解)提供了理论依据。

6.3　消除通约奇点的拟平均根数法

前面两节已仔细阐明了通约奇点的性质，在此基础上，将介绍一种原理简单、应用方便的拟平均根数法[7]，基本变量仍采用六个椭圆根数 a,e,i,Ω,ω,M。

1. 拟平均根数的引入

由于通约奇点问题出现在长周期项中(对于第三体摄动中短周期项的通约情况，相应的通

约项亦是首先转化成长周期项)，通约条件满足时，这种项的变化确实有所增大，但实际上它有一定的变化范围，这已在上节中指出。但是，不能再采用第三章介绍的平均根数法中那种长周期项的结构 $\sigma_l^{(1)}(t),\sigma_l^{(2)}(t),\cdots$。为此，引进下述经修改的平均根数(仍记作 $\bar{\sigma}$)：

$$\bar{\sigma}(t)=\bar{\sigma}^{(0)}(t)+\sigma_c(t)+\Delta\sigma_l^{(1)}(t)+\cdots \tag{6.16}$$

$$\sigma_c(t)=\sigma_1(t-t_0)+\sigma_2(t-t_0)+\cdots \tag{6.17}$$

$$\Delta\sigma_l^{(1)}(t)=\sigma_l^{(1)}(t)-\sigma_l^{(1)}(t_0),\cdots \tag{6.18}$$

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t)=\bar{\sigma}_0+\delta n(t-t_0) \tag{6.19}$$

$$\bar{\sigma}_0=\sigma_0-[\sigma_s^{(1)}(t_0)+\sigma_s^{(2)}(t_0)+\cdots] \tag{6.20}$$

代替原平均根数(见 3.1)作为参考解，δ 的意义与(3.2)式相同。相应的摄动解的结构变为

$$\sigma(t)=\bar{\sigma}(t)+[\sigma_s^{(1)}(t)+\sigma_s^{(2)}(t)+\cdots] \tag{6.21}$$

它与第三章中介绍的平均根数法有一差别，即将

$$\Delta\sigma_l^{(k)}(t)=\sigma_l^{(k)}(t)-\sigma_l^{(k)}(t_0),\quad k=1,2,\cdots$$

作为长周期变化项保留在平均根数中。由于这种项周期长(特别当通约情况发生时)，在不太长的间隔内与长期项类似，这样做是合理的，但这并不同于经典摄动法，因为经典摄动法是以无摄运动解作为参考解，在积分过程中将慢变量 Ω,ω 等视为常数。

根据上述修改后的平均根数的定义(6.16)，不妨称其为拟平均根数，当通约小分母出现时，尽管 $\sigma_l^{(k)}(t)$ 和 $\sigma_l^{(k)}(t_0)$ 分别出现问题，但作为相应的变化的 $\Delta\sigma_l^{(k)}(t)$ 却是一有限值，它真实地反应了轨道的变化状态，这样构造的摄动解将是有效的，通约奇点被消除。

2. 摄动解的构造——形式解的计算

摄动运动方程仍为(3.1)的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(a)+f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon) \tag{6.22}$$

$$\left.\begin{aligned}&f_0(a)=\delta n,\quad n=\sqrt{\mu}a^{-3/2}\\&\delta=(0,0,0,0,0,1)^T\end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

$$f_\varepsilon(\sigma,t,\varepsilon)=f_1(\sigma,t,\varepsilon)+f_2(\sigma,t,\varepsilon^2)+\cdots \tag{6.24}$$

且满足

$$f_{1l}=0 \tag{6.25}$$

根据拟平均根数的定义(6.16)，将形式解(6.21)代入方程(6.24)，右函数在 $\bar{\sigma}(t)$ 展开，得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{\sigma}(t)+\sigma_s^{(1)}(t)+\sigma_s^{(2)}(t)+\cdots]\\&=f_0(\bar{a})+\frac{\partial f_0}{\partial a}[a_s^{(1)}+a_s^{(2)}+\cdots]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial a^2}[a_s^{(1)}(t)+\cdots]^2+\cdots\\&+f_1(\sigma,t,\varepsilon)+\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}[\sigma_s^{(1)}+\cdots]_j+\frac{1}{2}\sum_j\sum_k\frac{\partial^2 f_1}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}[\sigma_s^{(1)}+\cdots]_j[\sigma_s^{(1)}+\cdots]_k+\cdots\\&+f_2(\bar{\sigma},t,\varepsilon^2)+\sum_j\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_j}[\sigma_s^{(1)}+\cdots]_j+\cdots\end{aligned} \tag{6.26}$$

该式右端出现的根数 σ 均为参考解 $\bar{\sigma}(t)$。若级数(6.21)收敛，则比较展开式(6.26)两端同次幂(ε^j)的系数，并分别积分，得

$$\bar{\sigma}^{(0)}(t) = \bar{\sigma}_0 + \int_{t_0}^{t} \delta \bar{n} \mathrm{d}t = \bar{\sigma}_0 + \delta \bar{n}_0 (t - t_0) \tag{6.27}$$

$$\sigma_1 (t - t_0) = \int_{t_0}^{t} [f_{1c}]_{\sigma} \mathrm{d}t \tag{6.28}$$

$$\sigma_s^{(1)}(t) = \int^{t} [\delta \frac{\partial n}{\partial a} a_s^{(1)} + f_{1s}]_{\sigma} \mathrm{d}t \tag{6.29}$$

$$\sigma_2 (t - t_0) = \int_{t_0}^{t} [\delta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial a^2} (a_s^{(1)})_c^2 + (\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j} (\sigma_s^{(1)})_j)_c + f_{2c}]_{\bar{\sigma}} \mathrm{d}t \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_l^{(1)}(t) &= \sigma_l^{(1)}(t) - \sigma_l^{(1)}(t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t} [\delta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial a^2} (a_s^{(1)})_l^2 + (\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j} (\sigma_s^{(1)})_j)_l + f_{2l}]_{\bar{\sigma}} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\sigma_s^{(2)}(t) = \int^{t} [\delta \frac{\partial n}{\partial a} a_s^{(2)} + \delta \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial a^2} (a_s^{(1)})_s^2 + (\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j} (\sigma_s^{(1)})_j)_s + f_{2s}]_{\sigma} \mathrm{d}t \tag{6.32}$$

……

从上述级数解的构造过程不难看出，与平均根数法一样，由 $f_{1l}=0$，递推过程亦是有效的。

对于一阶解，拟平均根数法的结果与平均根数法的结果基本一致，其中 $\sigma_1(t-t_0)$，$\sigma_2(t-t_0)$和 $\sigma_s^{(1)}(t)$的积分形式完全相同，但式中用到的 $\bar{\sigma}(t)$应是拟平均根数。两种方法不同之处在于：

(1)长周期项 $\sigma_l^{(1)}(t)$改为相应的变化 $\Delta\sigma_l^{(1)}(t)$，且列入平均根数 $\bar{\sigma}(t)$中，与二阶长期项 $\sigma_2(t-t_0)$相当；

(2)$\sigma_l^{(1)}(t)$的具体形式有变化，拟平均根数法中应少下列两项：

$$\delta \frac{\partial n}{\partial a} a_l^{(2)}, \sum_j \frac{\partial f_{1c}}{\partial \sigma_j} (\sigma_l^{(1)}),$$

关于这一点，如果已用原平均根数法导出了 $\sigma_l^{(1)}(t)$的表达式，那么只要将其中包含的上述两项删去，即得拟平均根数法对应的 $\sigma_l^{(1)}(t)$的表达式。

既然在一阶解中有上述差别，那么两种方法给出的结果，在一阶意义下的精度是否一致？我们必须对其作进一步讨论。为此，分别记平均根数法和拟平均根数法的长周期项为

$$[\sigma_l^{(1)}(t)]_1, \quad [\sigma_l^{(1)}(t)]_2$$

而且，对 a,e,i 有 $f_{1c}=0$，因此上述差别仅涉及到 $\Omega_l^{(1)}(t)$，$\omega_l^{(1)}(t)$和 $M_l^{(1)}(t)$，有

$$[\Delta\sigma_l^{(1)}(t)]_1 = [\Delta\sigma_l^{(1)}(t)]_2 + \int_{t_0}^{t} (\sum_j \frac{\partial f_{1c}}{\partial \sigma_j} (\sigma_l^{(1)})_j)_{\sigma} \mathrm{d}t \tag{6.33}$$

对于 M，还有一项$\frac{\partial n}{\partial a} a_l^{(2)}$，暂不讨论。因 $a_l^{(1)}(t)=0$，故(6.33)式右端积分中的被积函数实为

$$\sum_j \frac{\partial f_{1c}}{\partial \sigma_j} (\sigma_l^{(1)})_j = \frac{\partial f_{1c}}{\partial e} e_l^{(1)} + \frac{\partial f_{1c}}{\partial i} i_l^{(1)}$$

尽管 $\Delta e_l^{(1)}(t) \neq 0$，$\Delta i_l^{(1)}(t) \neq 0$，但就一阶解而言，一阶长期项系数 σ_1 的表达式应为

$$\sigma_1 = f_{1c}(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0)$$

即其中 $\bar{e}$，$\bar{i}$ 包含的 $\Delta e_l^{(1)}(t)$，$\Delta i_l^{(1)}(t)$不必考虑。但是，两种方法对应的 $\bar{e}_0$ 和 $\bar{i}_0$ 不相同，相应地有

$$(\bar{e}_0)_1 = (\bar{e}_0)_2 - [e_l^{(1)}(t_0)]$$

$$(\bar{i}_0)_1 = (\bar{i}_0)_2 - [i_l^{(1)}(t_0)]$$

这将导致 Ω,ω 和 M 的一阶长期项的计算出现类似于上述一阶长周期项的差别，即

$$[\sigma_1(t-t_0)]_1=[\sigma_1(t-t_0)]_2-\int_{t_0}^{t}\Big(\sum_j\frac{\partial f_{1c}}{\partial\sigma_j}(\sigma_l^{(1)})_j\Big)_s\mathrm{d}t \tag{6.34}$$

该式右端积分被积函数中的 $\sigma_l^{(1)}$ 应为 $e_l^{(1)}(t_0)$ 和 $t_l^{(1)}(t_0)$。因此，(6.33)与(6.34)式中两个积分之间唯一的差别是前者仍按长周期项积分，而后者用 $\bar{\sigma}_0$ 代入按长期项积分，这两者之间的差别为高阶项。关于 $\frac{\partial n}{\partial a}a_l^{(2)}$ 的讨论与上类似，其相应的差别，在零阶长期项 $n(t-t_0)$ 中补偿。

若考虑高阶项，则两种方法表达式的差别将逐渐明显，可视具体要求处理，这里不再讨论。

6.4 同时消除 $e=0$ 和通约奇点的摄动计算方法

在天体运动中，小偏心率情况是较普遍的，尽管 $e=0$ 引起的问题仅仅是一个变量选择不当的问题，但改用无奇点变量亦会带来一些新问题。因此，这一节将结合小 e 问题引用上一节的拟平均根数法来构造相应的摄动解，为此，我们仍以第三章第三节中讨论过的中心天体的扁率摄动为背景，这样可以和平均根数法作一对照。

1. 基本变量和相应的摄动运动方程

对于 $e=0$ 问题，引用第二章给出的无奇点变量：

$$a,\quad i,\quad \Omega,\quad \xi=e\cos\omega,\quad \eta=-e\sin\omega,\quad \lambda=M+\omega$$

并仍统一记作 σ，其六个元素按上述次序排列。相应的摄动运动方程即(2.48)式，其中摄动函数 R 已在第三章中给出，见(3.45)～(3.47)式，这里写成新变量的形式，即

$$R=R_{1c}+R_{1s} \tag{6.35}$$

$$R_{1c}=\frac{J_2}{2a^3}\Big(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\Big)[1-(\xi^2+\eta^2)]^{-3/2} \tag{6.36}$$

$$R_{1s}=\frac{J_2}{2a^3}\Big\{\Big(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\Big)\Big[\Big(\frac{a}{r}\Big)^3-(1-e^2)^{-3/2}\Big]+\frac{3}{2}\sin^2 i\Big(\frac{a}{r}\Big)^3\cos 2(f+\omega)\Big\} \tag{6.37}$$

以此代入$(\partial R/\partial\sigma)$型的摄动运动方程(2.48)，即得

$$\dot{\sigma}=f_0(a)+f_1(\sigma,\varepsilon) \tag{6.38}$$

$$f_0(a)=\delta n,\quad n=a^{-3/2} \tag{6.39}$$

$$f_1(\sigma,\varepsilon)=f_{1c}(a,i,e)+f_{1s}(a,i,e,\xi,\eta,\lambda) \tag{6.40}$$

其中

$$e=e(\xi,\eta)=(\xi^2+\eta^2)^{1/2} \tag{6.41}$$

为了与 3.3 中的结果对比，这里亦采用了相应的计算单位，使 $\mu=1$，全部公式变为无量纲形式，如需恢复有量纲形式亦容易，见第三章最后的说明。关于 f_{1c} 和 f_{1s}，显然分别对应 R_{1c} 和 R_{1s}。

2. 摄动解的构造与 ξ,η 两变量的处理

采用拟平均根数法，相应的摄动解的形式为

$$\sigma(t)=\bar{\sigma}(t)+[\sigma_s^{(1)}(t)+\sigma_s^{(2)}(t)+\cdots] \tag{6.42}$$

$$\bar{\sigma}(t)=\bar{\sigma}_0+\delta n(t-t_0)+(\sigma_1+\sigma_2+\cdots)(t-t_0)+\Delta\sigma_l^{(1)}(t)+\cdots \tag{6.43}$$

$$\Delta\sigma_l^{(k)}(t)=\sigma_l^{(k)}(t)-\sigma_l^{(k)}(t_0),\quad k=1,2,\cdots \tag{6.44}$$

各摄动项的构造形式见公式(6.27)～(6.32)。

首先讨论 $\sigma_1(t-t_0)$，显然有

$$a_1(t-t_0)=0 \tag{4.45}$$

$$i_1(t-t_0)=0 \tag{4.46}$$

$$\Omega_1(t-t_0)=-\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\ n(t-t_0) \tag{4.47}$$

$$\lambda_1(t-t_0)=(M_1+\omega_1)(t-t_0)$$

$$-\frac{3J_2}{2p^2}\left[(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)+(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)\sqrt{1-e^2}\right]n(t-t_0) \tag{6.48}$$

其中 $p=a(1-e^2)$，公式中出现的 a,i,e 各为 $\bar{a}_0,\bar{i}_0,\bar{e}_0$，并有 $\bar{e}_0=(\bar{\xi}_0^2+\bar{\eta}_0^2)^{1/2}$。至于 ξ 和 η，考虑到 $\sigma_1(t-t_0)$，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{\xi}}{\mathrm{d}t}&=(f_{1c})_\xi=\omega_1\bar{\eta}\\ \frac{\mathrm{d}\bar{\eta}}{\mathrm{d}t}&=(f_{1c})_\eta=-\omega_1\bar{\xi}\end{aligned}\right\} \tag{6.49}$$

其中

$$\omega_1-\frac{3J_2}{2p^2}n(2-\frac{5}{2}\sin^2 i) \tag{6.50}$$

如按拟平均根数法的迭代过程，与上述四个根数同样处理，则有

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi}&=\bar{\xi}_0+\xi_1(t-t_0)\\ \bar{\eta}&=\bar{\eta}_0+\eta_1(t-t_0)\end{aligned}\right\} \tag{6.51}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\xi_1(t-t_0)&=\omega_1\bar{\eta}_0(t-t_0)\\ \eta_1(t-t_0)&=-\omega_1\bar{\xi}_0(t-t_0)\end{aligned}\right\} \tag{6.52}$$

如此迭代下去，$\bar{\xi}$ 和 $\bar{\eta}$ 将以 $(t-t_0)$ 的幂级数形式出现，那么，相应的摄动解将使变量 $\xi=e\cos\omega$，$\eta=-e\sin\omega$ 的力学意义变得模糊，而且与之有关(即与 ω 有关)的长周期项完全消失，都变成 $(t-t_0)$ 的幂级数形式。还有，由于原长期项中包含 $\bar{e}=(\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2)^{1/2}$，将使问题更加复杂化。事实上，$\omega$ 的长期变化以 ξ,η 的变化反映出来的应是一种周期振动，考虑到这种特征，直接求解振动方程(6.49)更为合理，其解为

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi}&=\bar{\xi}_0\cos[\omega_1(t-t_0)]+\bar{\eta}_0\sin[\omega_1(t-t_0)]\\ \bar{\eta}&=\bar{\eta}_0\cos[\omega_1(t-t_0)]-\bar{\xi}_0\sin[\omega_1(t-t_0)]\end{aligned}\right\} \tag{6.53}$$

并有

$$\bar{e}^2=\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2=\bar{\xi}_0^2+\bar{\eta}_0^2=\bar{e}_0^2 \tag{6.54}$$

这完全符合各有关量的性质，上述几个问题亦不复存在，这种处理在有关工作中已普遍采用。

关于 $\sigma_s^{(1)}(t)$，积分表达式即(6.29)式，根据该积分表达式，可通过新旧变量之间的关系直接由原 3.3 中的结果(3.68)～(3.73)式给出这里所需要的 $\sigma_s^{(1)}(t)$，而不必另行积分，有

$$a_s^{(1)}(t)=\frac{J_2}{a}\{(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)[(\frac{a}{r})^3-(1-e^2)^{-3/2}]+\frac{3}{2}\sin^2 i(\frac{a}{r})^3\cos 2u\} \quad (6.55)$$

$$i_s^{(1)}(t)=\frac{3J_2}{8p^2}\sin 2i\{(\xi\cos u+\eta\sin u)+\cos 2u$$
$$+\frac{1}{3}(\xi\cos 3u-\eta\sin 3u)+\frac{1}{3}(\xi^2-\eta^2)F_2(e)\} \quad (6.56)$$

$$\Omega_s^{(1)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\{-(u-\lambda)-(\frac{1}{2}\xi\sin u+\frac{3}{2}\eta\cos u)+\frac{1}{2}\sin 2u$$
$$+\frac{1}{6}(\xi\sin 3u+\eta\cos 3u)-\frac{1}{3}\xi\eta F_2(e)\} \quad (6.57)$$

$$\xi_s^{(1)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\{(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)(u-\lambda)\eta$$
$$+[(1+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{9}{4}\eta^2)\cos u+\xi\eta\sin u+\frac{1}{2}\xi\cos 2u-\eta\sin 2u$$
$$+\frac{1}{12}(\xi^2-3\eta^2)\cos 3u-\frac{1}{3}\xi\eta\sin 3u+(1-\frac{e^2}{12}F_2(e))\xi-\frac{1}{12}(\xi^2-3\eta^2)\xi F_2(e)]$$
$$+\sin^2 i[(-\frac{5}{4}+\frac{3}{8}\xi^2-\frac{25}{8}\eta^2)\cos u-\frac{1}{4}\xi\eta\sin u+\frac{1}{2}\xi\cos 2u+2\eta\sin 2u$$
$$+(\frac{7}{12}+\frac{11}{48}\xi^2+\frac{25}{48}\eta^2)\cos 3u+\frac{7}{24}\xi\eta\sin 3u+\frac{3}{8}\xi\cos 4u-\frac{3}{8}\eta\sin 4u$$
$$+\frac{1}{16}(\xi^2-\eta^2)\cos 5u-\frac{1}{8}\xi\eta\sin 5u-(\frac{5}{4}-\frac{1}{6}e^2F_2(e))\xi$$
$$+(\frac{1}{4}F_2(e)-\frac{1}{6}F_3(e))(\xi^2-3\eta^2)\xi]\} \quad (6.58)$$

$$\eta_s^{(1)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\{-(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)(u-\lambda)\xi$$
$$-[(1+\frac{5}{4}\xi^2+\frac{1}{4}\eta^2)\sin u+2\xi\eta\cos u+\frac{1}{2}\eta\cos 2u-\frac{1}{12}e^2\sin 3u$$
$$-(1-\frac{e^2}{12}F_2(e))\eta+\frac{1}{12}(3\xi^2-\eta^2)\eta F_2(e)]$$
$$+\sin^2 i[(\frac{7}{4}+\frac{9}{8}e^2)\sin u+\frac{13}{4}\xi\eta\cos u-\frac{1}{2}\xi\sin 2u+2\eta\cos 2u$$
$$-(\frac{7}{12}+\frac{13}{48}\xi^2+\frac{23}{48}\eta^2)\sin 3u+\frac{5}{24}\xi\eta\cos 3u-\frac{3}{8}\xi\sin 4u-\frac{3}{8}\eta\cos 4u$$
$$-\frac{1}{16}(\xi^2-\eta^2)\sin 5u-\frac{1}{8}\xi\eta\cos 5u-(\frac{5}{4}-\frac{1}{6}e^2F_2(e))\eta$$
$$+(\frac{1}{4}F_2(e)-\frac{1}{6}F_3(e))(3\xi^2-\eta^2)\eta]\} \quad (6.59)$$

$$\lambda_s^{(1)}(t)=-\cos i\Omega_s^{(1)}(t)$$
$$+\frac{3J_2}{2p^2}\{(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)(u-\lambda)+(\xi\sin u+\eta\cos u)+F_1(e)[(1-\frac{1}{4}e^2)(\xi\sin u+\eta\cos u)$$
$$+\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)\sin 2u+\xi\eta\cos 2u+\frac{1}{12}(\xi^2-3\eta^2)\xi\sin 3u+\frac{1}{12}(3\xi^2-\eta^2)\eta\cos 3u]\}$$
$$+\frac{3J_2}{2p^2}\sin^2 i\{-(2\xi\sin u+\eta\cos u)+\frac{3}{4}\sin 2u-\frac{1}{6}(\xi\sin 3u+\eta\cos 3u)-\frac{1}{2}\xi\eta F_2(e)$$
$$+F_1(e)[(-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\sqrt{1-e^2}+\frac{1}{8}(\xi^2-\eta^2))\xi\sin u$$
$$+(-\frac{5}{2}-\frac{5}{4}\sqrt{1-e^2}+\frac{1}{8}(7\xi^2+5\eta^2))\eta\cos u$$

$$-\frac{3}{4}(\xi^2-\eta^2)\sin 2u-\frac{3}{2}\xi\eta\cos 2u+(1+\frac{5}{12}\sqrt{1-e^2}-\frac{7}{48}\xi^2+\frac{17}{48}\eta^2)\xi\sin 3u$$

$$+(1+\frac{5}{12}\sqrt{1-e^2}-\frac{19}{48}\xi^2+\frac{5}{48}\eta^2)\eta\cos 3u+\frac{3}{8}(\xi^2-\eta^2)\sin 4u+\frac{3}{4}\xi\eta\cos 4u$$

$$+\frac{1}{16}(\xi^2-3\eta^2)\xi\sin 5u+\frac{1}{16}(3\xi^2-\eta^2)\eta\cos 5u+(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}F_2(e)+\frac{1}{6}F_3(e))\xi\eta]\} \tag{6.60}$$

这里$\overline{\sigma_s^{(1)}(t)}=0$，其中

$$\left.\begin{aligned}
F_1(e)&=\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\\
F_2(e)&=\frac{\overline{\cos 2f}}{e^2}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}\\
F_3(e)&=\frac{\overline{\cos 2f}-3e^2/4}{e^4}=\frac{1+3\sqrt{1-e^2}}{4(1+\sqrt{1-e^2})^3}
\end{aligned}\right\} \tag{6.61}$$

各式中的$(\frac{a}{r})$和$u=f+\omega$的计算方法如下：

首先由λ和ξ,η解“广义开普勒方程”

$$\tilde{u}-\lambda=\xi\sin\tilde{u}+\eta\cos\tilde{u} \tag{6.62}$$

给出$(\tilde{u}-\lambda)$和$\tilde{u}$，这里$\tilde{u}=E+\omega$。再由$\tilde{u}$和ξ,η计算$(\frac{a}{r})$，即

$$(\frac{a}{r})=(1-\xi\cos\tilde{u}+\eta\sin\tilde{u})^{-1} \tag{6.63}$$

最后由

$$\sin(u-\tilde{u})=(\frac{a}{r})(\tilde{u}-\lambda)[1+F_1(e)(\eta\sin\tilde{u}-\xi\cos\tilde{u})] \tag{6.64}$$

计算$(u-\tilde{u})$，从而得

$$u-\lambda=(u-\tilde{u})+(\tilde{u}-\lambda) \tag{6.65}$$

也就给出了u。这种算法的特点是$(u-\lambda)$，$(u-\tilde{u})$和$(\tilde{u}-\lambda)$三者的量级均为e，可防止计算过程中对角度u、$\tilde{u}$，λ的不当处理(如保持在$0\sim2\pi$区间上)所导致的错误。上述(6.63)～(6.65)三式分别由下列三式推出，即

$$\left.\begin{aligned}
&E-M=e\sin E\\
&(\frac{a}{r})=(1-e\cos E)^{-1}\\
&r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E,\quad r\cos f=a(\cos E-e)
\end{aligned}\right\} \tag{6.66}$$

上述所有公式中出现的“根数”都应是准到一阶长期项的拟平均根数。

接下来讨论$\sigma_2(t-t_0)$和$\Delta\sigma_l^{(1)}(t)$。由积分表达式(6.30)和(6.31)不难看出，对于J_2项摄动，需要讨论的只是如下“间接”项

$$(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l}$$

能否像$\sigma_s^{(1)}(t)$那样，利用原变量的结果直接给出，这是一个很有意义的问题。为此，将上述以新变量$a,i,\Omega,\xi,\eta,\lambda$表达的函数$f_{1c}$和$f_{1l}$记作$\tilde{f}_{1c}$和$\tilde{f}_{1l}$，用原变量$a,e,i,\Omega,\omega,M$表达的$f_1$仍记为$f_{1l}$和$f_{1c}$。而

$$(\sum_j \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} \text{和} (\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l}$$

分别表示对新变量和老变量进行运算。经证明[8]，对 a, i, Ω 有

$$(\sum_j \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} = (\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} \tag{6.67}$$

对 λ 有

$$(\sum_j \frac{\partial (\tilde{f}_1)_\lambda}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} = (\sum_j \frac{\partial (f_1)_M}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} + (\sum_j \frac{\partial (f_1)_\omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} \tag{6.68}$$

对 ξ 有

$$(\sum_j \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} = \cos\omega (\sum_j \frac{\partial (f_1)_e}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} - e\sin\omega (\sum_j \frac{\partial (f_1)_\omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} \tag{6.69}$$

对 η 有

$$(\sum_j \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} = -\sin\omega (\sum_j \frac{\partial (f_1)_e}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} - e\cos\omega (\sum_j \frac{\partial (f_1)_\omega}{\partial \sigma_j}(\sigma_s^{(1)})_j)_{c,l} \tag{6.70}$$

由此给出二阶长期项为

$$a_2(t-t_0)=0 \tag{6.71}$$

$$i_2(t-t_0)=0 \tag{6.72}$$

$$\xi_2(t-t_0)=0 \tag{6.73}$$

$$\eta_2(t-t_0)=0 \tag{6.74}$$

$$\begin{aligned}\Omega_2(t-t_0) = &-(\frac{3J_2}{2p^2})^2\cos i[(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}e^2+\sqrt{1-e^2}) \\ &-\sin^2 i(\frac{5}{3}-\frac{5}{24}e^2+\frac{3}{2}\sqrt{1-e^2})]n(t-t_0)\end{aligned} \tag{6.75}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2(t-t_0) = &(\frac{3J_2}{2p^2})^2\{(\frac{9}{2}+\frac{1}{12}e^2)+(\frac{9}{2}+\frac{10}{3}e^2)\sqrt{1-e^2} \\ &-\sin^2 i[(\frac{121}{12}-\frac{9}{8}e^2)+(\frac{71}{6}+\frac{26}{3}e^2)\sqrt{1-e^2}] \\ &+\sin^4 i[(\frac{269}{48}-\frac{51}{32}e^2)+(\frac{413}{48}+\frac{103}{12}e^2)\sqrt{1-e^2}] \\ &+\frac{35}{4}(\frac{e^4}{\sqrt{1-e^2}})(\frac{1}{3}-\sin^2 i+\frac{9}{8}\sin^4 i)\}n(t-t_0)\end{aligned} \tag{6.76}$$

各式中出现的 a, i, e 即 $\bar{a}_0, \bar{i}_0, \bar{e}_0$。关于 $\xi_2(t-t_0)$ 和 $\eta_2(t-t_0)$ 仅考虑 J_2 项摄动时不会再出现，但若考虑其它摄动因素时，是可能出现的，例如考虑非球形奇次带谐项($J_3,\cdots$)的摄动时，会出现 $\xi_2(t-t_0)$ 项，但仍可像前面处理 $\xi_1(t-t_0)$ 和 $\eta_1(t-t_0)$ 那样，放到下列振动方程中求解，即

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{\xi}}{dt}=\omega_1\bar{\eta}+\xi_2 \\ \dfrac{d\bar{\eta}}{dt}=-\omega_1\bar{\xi}\end{cases}$$

此方程只是增加了一非齐次项。

一阶长周期变化项 $\Delta\sigma_l^{(1)}(t)=\sigma_l^{(1)}(t)-\sigma_l^{(1)}(t_0)$ 如下：

$$\Delta a_l^{(1)}(t)=0 \tag{6.77}$$

$$\Delta i_l^{(1)}(t)=-\frac{3J_2}{2p^2}\sin 2i[\frac{1}{6}(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)F_2(e)+(\frac{7}{24}-\frac{5}{16}\sin^2 i)]G_4 \tag{6.78}$$

$$\Delta\Omega_l^{(1)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\cos i\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\sin^2 i\right)F_2(e)+\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{4}\sin^2 i\right)\right]G_3 \tag{6.79}$$

$$\begin{aligned}\Delta\xi_l^{(1)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\Big\{\Big[&\left(4+\frac{7}{24}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\left(\frac{15}{2}-\frac{47}{48}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i\\&+\left(\frac{155}{48}-\frac{25}{16}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^4 i-\left(\frac{1}{3}-\frac{11}{6}\sin^4 i+\frac{5}{3}\sin^4 i\right)e^2F_2(e)\Big]G_1\\&+\Big[\left(\frac{7}{24}-\frac{39}{16}\sin^2 i+\frac{75}{32}\sin^4 i\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{11}{6}\sin^2 i+\frac{5}{3}\sin^4 i\right)F_2(e)\\&+\frac{1}{3}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\sin^2 i(1-e^2)F_3(e)\Big]G_5\Big\}\end{aligned} \tag{6.80}$$

$$\begin{aligned}\Delta\eta_l^{(1)}(t)=\frac{3J_2}{2p^2}\Big\{\Big[&\left(4+\frac{7}{8}e^2+2\sqrt{1-e^2}\right)-\left(\frac{29}{3}+\frac{83}{48}e^2+\frac{11}{2}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i\\&+\left(\frac{275}{48}+\frac{5}{8}e^2+\frac{15}{4}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^4 i+\left(\frac{1}{3}-\frac{11}{6}\sin^2 i+\frac{5}{3}\sin^4 i\right)e^2F_2(e)\Big]G_2\\&+\Big[\left(\frac{7}{24}-\frac{39}{16}\sin^2 i+\frac{75}{32}\sin^4 i\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{11}{6}\sin^2 i+\frac{5}{3}\sin^4 i\right)F_2(e)\\&+\frac{1}{3}\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\sin^2 i(1-e^2)F_3(e)\Big]G_6\Big\}\end{aligned} \tag{6.81}$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_l^{(1)}(t)=-\frac{3J_2}{2p^2}\Big\{&F_1(e)F_2(e)\Big[\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)-\left(6-\frac{7}{3}e^2+\frac{20}{3}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i\\&+\left(\frac{25}{4}-\frac{35}{12}e^2+\frac{85}{12}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^4 i\Big]\\&+F_1(e)\Big[\frac{7}{12}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)-\left(\frac{101}{24}+\frac{2}{3}e^2+\frac{21}{8}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^2 i\\&+\left(\frac{43}{16}+2e^2+\frac{13}{16}\sqrt{1-e^2}\right)\sin^4 i\Big]\\&+\frac{7}{2}e^2F_1(e)\Big[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sin^2 i\Big]\Big\}G_3\\&+\frac{3J_2}{2p^2}\Big\{\frac{3}{64}\left(\frac{\sin^4 i}{\sqrt{1-e^2}}\right)\Big\}G_7\end{aligned} \tag{6.82}$$

其中

$$G_1=\frac{\bar{\xi}-\bar{\xi}_0}{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}\longrightarrow\bar{\eta}_0\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\bar{n}(t-t_0) \tag{6.83}$$

$$G_2=\frac{\bar{\eta}-\bar{\eta}_0}{\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}\longrightarrow-\bar{\xi}_0\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\bar{n}(t-t_0) \tag{6.84}$$

$$G_3=\frac{2\bar{\xi}\bar{\eta}-2\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0}{2\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}\longrightarrow-(\bar{\xi}_0^2-\bar{\eta}_0^2)\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\bar{n}(t-t_0) \tag{6.85}$$

$$G_4=\frac{(\bar{\xi}^2-\bar{\eta}^2)-(\bar{\xi}_0^2-\bar{\eta}_0^2)}{2\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}\longrightarrow2\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\bar{n}(t-t_0) \tag{6.86}$$

$$G_5=\frac{\bar{\xi}(\bar{\xi}^2-3\bar{\eta}^2)-\bar{\xi}_0(\bar{\xi}_0^2-3\bar{\eta}_0^2)}{3\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}\longrightarrow\bar{\eta}_0(3\bar{\xi}_0^2-\bar{\eta}_0^2)\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\bar{n}(t-t_0) \tag{6.87}$$

$$G_6=\frac{\bar{\eta}(3\bar{\xi}^2-\bar{\eta}^2)-\bar{\eta}_0(3\bar{\xi}_0^2-\bar{\eta}_0^2)}{3\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)}\longrightarrow\bar{\xi}_0(3\bar{\eta}_0^2-\bar{\xi}_0^2)\left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\bar{n}(t-t_0) \tag{6.88}$$

$$G_7=\frac{4\bar{\xi}\bar{\eta}(\bar{\eta}^2-\bar{\xi}^2)-4\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0(\bar{\eta}_0^2-\bar{\xi}_0^2)}{4(2-\frac{5}{2}\sin^2 i)}\longrightarrow[(\bar{\xi}_0^2-\bar{\eta}_0^2)^2-4\bar{\xi}_0^2\bar{\eta}_0^2](\frac{3J_2}{2p^2})\bar{n}(t-t_0) \tag{6.89}$$

上述各式中的 a,i,e 即 $\bar{a}_0,\bar{i}_0,\bar{e}_0$，而 $\bar{\xi},\bar{\eta}$ 是取到一阶长期项的拟平均根数。(6.83)～(6.89)式给出了有关项的两种计算方法，"→"左端是严格按长周期项积分的结果，而右端则是按长期项积分的结果。例如

$$\int_{t_0}^{t}(-\bar{\xi})\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}(-\bar{e}\cos\bar{\omega})\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\bar{\eta}-\bar{\eta}_0}{\omega_1}\longrightarrow-\bar{\xi}_0(t-t_0)$$

关于两种算法问题，在一般情况下，采用第一种算法，而当通约条件(这里是临界倾角)满足时，即

$$\left.\begin{aligned}&|2-\frac{5}{2}\sin^2 i|<\delta\\&\delta=O(\mu^{1/2})=10^{-3}\end{aligned}\right\} \tag{6.90}$$

则采用第二种算法。

上述方法既消除了通约奇点，同时也适用于 $0\leqslant e<1$。尽管是针对中心天体扁率摄动中的通约奇点建立的摄动解，但这一处理方法对其它类型摄动中的通约奇点问题也适用，只要将通约对应的长周期项按上述方法处理即行，其有效性已在实用中得到证实。

参 考 文 献

[1]Zhihong Xia, *Annals of Mathematics*, 135(1992), 411～468.
[2]叶彦谦,《常微分方程讲义》,高教出版社,1982。
[3]Garfinkel, B., *Astron. J.*, 71(1966), 657～669.
[4]Liu, L., Innanen, K. A., *Astron. J.*, 90(1985), 877～886.
[5]廖新浩,刘林,紫金山天文台台刊,8(1989),229～273.
[6]赵长印,博士论文,南京大学,1993。
[7]刘林,天文学报,15(1974),230—240。*CAA*,1(1977),31～42。
[8]刘林,天文学报,16(1975),65—80。*CAA*,1(1977),63～78。

第七章　变换理论及其应用

前面几章都是直接从一般摄动运动方程着手，采用经典摄动法和改进的摄动法——平均根数法以及与其类似的拟平均根数法来构造小参数幂级数解，原理虽简单，但从构造解的过程来看，要给出具体摄动解的表达式，还是比较麻烦的，若要构造高阶解，其麻烦的程度，几乎达到无法实现的地步。另外，有些环节，如在用平均根数法构造扁率摄动短周期项的处理中，对一阶解很简单，但在求二阶解时却遇到了麻烦，即真近点角 f 必须展成平近点角 M 的三角级数，这是不理想的。本章将在平均根数法基本思想的基础上介绍一类变换方法，这类方法可避免上述平均根数法所遇到的麻烦。

就变换思想，首先想到 Hamilton 力学中的正则变换，用其构造摄动运动方程的级数解，相对而言要比前面的各种摄动法简单，而且原理清晰。这类方法在天体力学领域中不仅可用来简单地构造分析解(指小参数幂级数解)，而且在一些定性研究中亦大有用途，如简化动力系统、Hamilton 函数的标准化[1]等。本章最后一节还将正则变换方法推广到一般动力系统，建立非正则形式的变换方法，确切地说，就是平均根数法的变换形式，它同样可解除上面提到的平均根数法所遇到的麻烦。

为了便于读者能顺利地阅读这一部分内容，本章将首先扼要地回顾一下 Hamilton 力学的基本内容。

7.1　正则运动方程与正则共轭变量

1. Hamilton 系统的数学描述

n 个看成质点的天体 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，在相互引力作用下运动，即 n 体系统，它是一个自由度为 $3n$ 的 n 体系统，有 $3n$ 个相互独立的坐标(在有约束条件时，自由度要少于 $3n$，这里不予讨论)。如果采用惯性直角坐标系 $O\text{-}xyz$，则 $3n$ 个独立坐标记为 $x_i, y_i, z_i (i=1,2,\cdots,n)$。该系统的总动能 T 为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2) \tag{7.1}$$

其中 m_i 为各天体的质量。相应的力函数 U 为

$$
\left.\begin{aligned}
U &= G\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{m_i m_k}{\Delta_{ik}}\right)_{i<k} \\
\Delta_{ik}^2 &= (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2
\end{aligned}\right\} \tag{7.2}
$$

它与系统总位能相差一符号，其中 G 是万有引力常数。对于这一引力 n 体问题，各天体的运动方程显然可写成下列形式：

$$
\left.\begin{aligned}
m_i\ddot{x}_i &= \frac{\partial U}{\partial x_i} \\
m_i\ddot{y}_i &= \frac{\partial U}{\partial y_i} \\
m_i\ddot{z}_i &= \frac{\partial U}{\partial z_i} \\
i &= 1,2,\cdots,n
\end{aligned}\right\} \tag{7.3}
$$

为了讨论问题的需要，常引进 $3n$ 个独立变量 $q_j(j=1,2,\cdots,3n)$，将直角坐标表示成这 $3n$ 个变量和时间 t 的函数，即作一变换：

$$
\left.\begin{aligned}
x_i &= x_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n},t) = x_i(q,t) \\
y_i &= y_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n},t) = y_i(q,t) \\
z_i &= z_i(q_1,q_2,\cdots,q_{3n},t) = z_i(q,t) \\
i &= 1,2,\cdots,n
\end{aligned}\right\} \tag{7.4}
$$

只要该变换所有函数 $x_i(q,t),y_i(q,t),z_i(q,t)$ 存在对 q,t 的一、二阶连续偏导数，就将求解运动方程(7.3)的问题转化为求解 $3n$ 个独立变量 q_j 对应的运动问题，这种变量 q_j 叫做广义坐标，相应的 $\dot{q}_j$ 即为广义速度，q_j 可以是一般的曲线坐标，如球坐标 r,λ,φ。

引进变换(7.4)式后，有

$$
\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j
$$

$\dot{y}_i$、$\dot{z}_i$ 有类似形式。将此关系代入(7.1)式，则总动能变为

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{j=1}^{3n} A_j\dot{q}_j^2 + 2\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{3n} B_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{3n} C_j\dot{q}_j + D \\
&= T_2 + T_1 + T_0
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

其中 T_2 为 $\dot{q}_j$ 的二次齐次式，T_1 为 $\dot{q}_j$ 的一次齐次式，T_0 是不含 $\dot{q}_j$ 的项，即

$$
\left.\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{j=1}^{3n} A_j\dot{q}_j^2 + 2\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{3n} B_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \\
T_1 &= \sum_{j=1}^{3n} C_j\dot{q}_j \\
T_0 &= D
\end{aligned}\right\} \tag{7.6}
$$

系数 A_j,B_{jk},C_j 和 D 是 q_j,t 的函数（还包含质量因子），与 $\dot{q}_j$ 无关。显然，T 有如下形式：

$$
T = T(q,\dot{q},t) \tag{7.7}
$$

若将变换关系(7.4)式代入(7.2)式，则力函数 U 可表示为

$$
U = U(q,t) \tag{7.8}
$$

根据上述变换后的 T 和 U 的表达式，可将运动方程(7.3)转化为广义坐标 q_j 所满足的运

动方程。略去推导过程，直接写出该方程的具体形式如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_j} \tag{7.9}$$

其中

$$L=L(q,\dot{q},t)=T+U \tag{7.10}$$

这就是用广义坐标表示的 n 体问题的运动方程，在分析力学中称为拉格朗日方程，$L(q,\dot{q},t)$就称为拉格朗日函数，它是系统总动能与总位能之差。

仿照坐标与动量的关系，引进广义动量 p_j：

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{7.11}$$

显然，$p_j=p_j(q,\dot{q},t)$是 $\dot{q}_j$ 的线性函数。由此引入函数 H，按下式定义：

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^{3n} p_j\dot{q}_j - L = \bar{T}_2 - T_0 - U \\ &= H(p,q,t) \end{aligned} \tag{7.12}$$

其中 $\bar{T}_2=\bar{T}_2(p,q,t)$，即原 T_2 中的 $\dot{q}$ 用 p 表示。引进 p_j 和 H 后可将 q_j 满足的运动方程(7.9)化为另一种对称形式，即

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \\ j &= 1,2,\cdots,3n \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

这个用广义坐标和广义动量作为基本变量的运动方程是 Hamilton 于 1874 年给出的，故称为 Hamilton 正则运动方程，简称正则运动方程，H 即 Hamilton 函数，q_j 和 p_j 就称为正则共轭变量。

用正则运动方程(7.13)描述的动力系统，常称为 Hamilton 系统，相应的 Hamilton 流具有一个很好的几何结构——辛(Symplectic)结构，这在定性研究以及定性研究的数值探索中具有相当重要的作用，后面第九章将专门介绍这一问题，即根据 Hamilton 流保持辛结构这一特征，构造出新的数值解法。下面仍就分析解法介绍正则运动方程的有关问题。

当变换(7.4)不显含 t 时，有

$$T=T_2,\quad T_1=T_0=0$$

此时

$$H=T-U=H(p,q) \tag{7.14}$$

显然，H 就是系统的总能量(动能与位能之和)，而在一般情况下，即前面的 $H(p,q,t)$，就称为广义能量。上述 H 不显含 t 对应的 Hamilton 系统称为定常的或自治的。该系统有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{3n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

将满足方程(7.13)式的 $\dot{q}_j$ 和 $\dot{p}_j$ 代入上式，即得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$$

这表示定常 Hamilton 系统存在一积分

$$H(p,q)=h \tag{7.15}$$

此即能量积分，h 就是能量常数。

如果就取直角坐标 $x_i, y_i, z_i (i=1,2,\cdots,n)$ 作为广义坐标，那么 $m_i\dot{x}_i, m_i\dot{y}_i, m_i\dot{z}_i$ 即为广义动量。相应的动能 $T=T_2$，即(7.1)式，于是

$$H=T-U=H(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

不显含 t。因此，在惯性直角坐标系中，n 体引力问题存在能量积分 $H=h$。

2. 正则运动方程的特殊解法——循环坐标

正则运动方程的求解，不仅可用一般常微分方程的各种解法和分析力学中的 Hamilton-Jacobi 方法，而且由于它具有一种对称性，还有一种特殊解法，即寻找循环坐标来降阶。例如，当 H 不含某个 q_j 时，有

$$\dot{p}_j=\frac{\partial H}{\partial q_j}=0$$

存在一积分

$$p_j=C$$

而因 H 不含 q_j，又可将其分离开，于是 n 体问题的正则运动方程组(7.13)可降低两阶。上述 q_j 即称为循环坐标，如果不含某个 p_j，效果相同，它亦被称为循环坐标。本章要介绍的变换方法，就是寻找一种特殊的正则变换，使变换后的 Hamilton 函数具有足够的循环坐标，从而达到获得摄动解的目的。

3. 受摄二体问题中常用的正则共轭变量

(1)若采用直角坐标系 $O\text{-}xyz$，坐标原点 O 即中心天体的质心，那么运动天体的坐标矢量 $\boldsymbol{r}$ 及其速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 就可作为一对正则共轭变量，相应的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2-V(\boldsymbol{r}) \tag{7.16}$$

相应的正则运动方程即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial H}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}=\dot{\boldsymbol{r}}\\ \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}=\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^T\end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

其中 V 是位函数，比力函数 U 少一个质量因子 m，上标“T”表示转置。如果中心天体为非球形天体，则 V 对应的是一个非球形引力位函数，若该系统还存在其它摄动源(属保守力摄动)，则 V 中还包含相应的摄动函数，即

$$V=V_0+R \tag{7.18}$$

其中

$$V_0=\frac{\mu}{r},\quad \mu=G(M+m) \tag{7.19}$$

M 是中心天体的质量。而摄动函数 R 包含非球形引力位的全部修正项(带谐项和田谐项)以及

其它摄动源对应的部分。

如果将 $\dot{r}$ 表示成轨道根数的形式，有

$$\dot{r}^2=\mu(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})$$

则相应的 Hamilton 函数(7.16)式即可写成下列形式：

$$H=-\frac{\mu}{2a}-R \tag{7.20}$$

(2)德洛纳变量

这在第二章中已提到过，见(2.47)式，即

$$\left.\begin{aligned}&L=\sqrt{\mu a}, & l=M\\&G=\sqrt{\mu a(1-e^2)}, & g=\omega\\&H=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i, & h=\Omega\end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

这是轨道根数的一种组合，角动量 L,G,H 是广义动量，角变量 l,g,h 是广义坐标。引用这组正则共轭变量时，习惯上是将相应的 Hamilton 函数变一符号，即

$$\begin{aligned}F&=-H\\&=\frac{\mu^2}{2L^2}+R\end{aligned} \tag{7.22}$$

于是相应的正则运动方程亦改变一符号，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial F}{\partial L}\\&\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial F}{\partial G}\\&\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial F}{\partial H}\end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

德洛纳变量是常用的一组变量，它既是正则共轭变量，又与轨道根数很相近，引用方便。第二章中介绍的解决小 e、小 i 问题的无奇点正则共轭变量就是在其基础上引进的，见公式(2.56)和(2.58)，在讨论通约奇点对应的轨道共振问题中采用的正则共轭变量，亦是在其基础上引进的[2]，具体讨论见后面 7.6。

7.2 正则变换与生成函数

1. 向空间的正则变换

为了数学上的简洁，讨论 n 个自由度的力学系统，仍以 q 和 p 表示广义坐标和广义动量，它们都是 n 维向量，即

$$q=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix},\quad p=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_n\end{pmatrix} \tag{7.24}$$

或简记

$$q=(q_i),\quad p=(p_i)$$

q_i 和 p_i 分别表示向量 q 和 p 的分量。Hamilton 函数 $H=H(p,q,t)$ 为一数量函数。广义坐标 q 组成的 n 维空间称为位形空间，广义动量 p 组成的 n 维空间称为动量空间，而 $2n$ 维向量

$$x=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\tag{7.25}$$

组成的空间，则称为相空间，它是 $2n$ 维空间，相应的 Hamilton 函数 $H=H(x,t)$。

按一般习惯用法，数量函数 H 对向量 x 的偏导数 H_x，向量函数 $y=y(x,t)$ 对数量 t 的偏导数 y_t 和对向量 x 的偏导数 y_x，分别由下列各式表达：

$$H_x=\left(\frac{\partial H}{\partial x_1},\frac{\partial H}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x_{2n}}\right)\tag{7.26}$$

$$y_t=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial t}\\\dfrac{\partial y_2}{\partial t}\\\vdots\\\dfrac{\partial y_{2n}}{\partial t}\end{pmatrix}\tag{7.27}$$

$$y_x=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_{2n}}\\\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_{2n}}\\ & \cdots\cdots & & \\\dfrac{\partial y_{2n}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_{2n}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_{2n}}{\partial x_{2n}}\end{pmatrix}\tag{7.28}$$

即 H_x 为一横向量，y_t 为一列向量，y_x 则为一矩阵函数（这里是 $2n\times 2n$ 阶方阵）。

引进矩阵 I：

$$I=\begin{pmatrix}0 & -E_n\\E_n & 0\end{pmatrix}\tag{7.29}$$

其中 E_n 为 $n\times n$ 阶单位矩阵，“0”表示 $n\times n$ 阶零矩阵。于是正则运动方程(7.13)可写成下列形式：

$$\dot{x}=IH_x^T\tag{7.30}$$

矩阵 I 有如下性质：

$$I^{-1}=I^T=-I,\qquad II=-E_{2n}\tag{7.31}$$

关于正则变换，它是相空间的一种变换，较常用的定义是：对 x,t 和相应的 Hamilton 函数 $H(x,t)\in C^{[1]}$，引进一向空间的变换 $y=y(x,t)\in C^{[2]}$，若存在数量函数 $K=K(y,t)\in C^{(1)}$，使得

$$\Gamma(\dot{x}-IH_x^T)=\dot{y}-IK_y^T\tag{7.32}$$

则该变换 $y=y(x,t)$ 就称为正则变换。这里 $\Gamma=y_x$，$C^{(\nu)}$ 表示存在 ν 阶连续偏导数，$C^{[\nu]}$ 表示相应函数及其反函数均存在 ν 阶连续偏导数，$\nu=1,2,\cdots$。上述定义说明：若 x 满足以 $H(x,t)$ 为

Hamilton 函数的正则运动方程 $\dot{x}-IH_x^T=0$，则经变换 $y=y(x,t)$，或 $x=x(y,t)$，新变量 y 满足以 $K(y,t)$ 为新 Hamilton 函数的正则运动方程 $\dot{y}-IK_y^T=0$。

2. 正则变换的充要条件

直接根据定义来判断变换 $y=y(x,t)$ 是否正则变换，显然不太方便。为此，不加证明地介绍一个相应的定理和有关内容。

定理 1 相空间的变换 $y=y(x,t)\in C^{[2]}$ 是正则变换的充要条件为

$$\Gamma J\Gamma^T=\Gamma^T J\Gamma=\mu J \tag{7.33}$$

其中

$$J=I^T=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix} \tag{7.34}$$

μ 为与 x,t 无关的常数，称为变换乘子。相应的变换后的新 Hamilton 函数 $K(y,t)$ 由下式给出：

$$K(y,t)=\mu H(x(y,t),t)+R(y,t) \tag{7.35}$$

其中 R 称为变换的余函数，有

$$R_y=Jy_t \tag{7.36}$$

实际上常常要用的就是 R_y，而不是 R。

如果正则变换不显含 t，即 $y=y(x)$，有 $y_t=0$，可取 $R=0$，因此有

$$K=\mu H$$

这样的正则变换称为保守正则变换。若 $R=0$，又有 $\mu=1$，则

$$K=H$$

相应的正则变换称为完全正则变换。事实上，上一节给出的两组正则共轭变量 $(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$ 和 (L,G,H,l,g,h) 相互之间的关系：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}(a,e,i,\Omega,\omega,M)=\boldsymbol{r}(L,G,H,l,g,h)\\ \dot{\boldsymbol{r}}&=\dot{\boldsymbol{r}}(a,e,i,\Omega,\omega,M)=\dot{\boldsymbol{r}}(L,G,H,l,g,h)\end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

即为一完全正则变换。

3. 正则变换充要条件的泊松括号形式

正则变换的充要条件(7.33)常常用泊松括号来表示，泊松括号的定义如下：

设 F,G 为两个 $2n$ 维向量 $x=(x_i)$ 的数量函数，皆属 $C^{(1)}$ 类，引进一个 x 的连续函数 $\{F;G\}$，其表达式为

$$\{F;G\}=F_x^T\cdot JG_x^T \tag{7.38}$$

即

$$\begin{aligned}\{F;G\}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_{n+i}}-\frac{\partial F}{\partial x_{n+i}}\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_i,x_{n+i})}=-\{G;F\}\end{aligned} \tag{7.39}$$

$\{F;G\}$ 就称为 F,G 的泊松括号。

泊松括号有如下运算性质，即若 F_1, F_2, F_3 皆属 $C^{(1)}$ 类，则有

$$\{F_1+F_2;F_3\}=\{F_1;F_3\}+\{F_2;F_3\} \tag{7.40}$$

$$\{F_1\cdot F_2;F_3\}=\{F_1;F_3\}F_2+\{F_2;F_3\}F_1 \tag{7.41}$$

$$\{\{F_1;F_2\};F_3\}+\{\{F_2;F_3\};F_1\}+\{\{F_3;F_1\};F_2\}=0 \tag{7.42}$$

设 p,q 和 P,Q 都是 n 维向量，p,q 为正则共轭变量，若记

$$x=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \qquad y=\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \tag{7.43}$$

则变换 $y=y(x,t)$ 及逆变换 $x=x(y,t)$ 可写成

$$\left.\begin{aligned} P&=P(p,q,t) \\ Q&=Q(p,q,t) \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

和

$$\left.\begin{aligned} p&=p(P,Q,t) \\ q&=q(P,Q,t) \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

此时变换矩阵 Γ 为

$$\Gamma=y_x=\begin{pmatrix} P_p & P_q \\ Q_p & Q_q \end{pmatrix} \tag{7.46}$$

正则变换的充要条件 $\Gamma J\Gamma^T=\mu J$ 即变为

$$\Gamma J\Gamma^T=\begin{pmatrix} P_pP_q^T-P_qP_p^T & P_pQ_q^T-P_qQ_p^T \\ Q_pP_q^T-Q_qP_p^T & Q_pQ_q^T-Q_qQ_p^T \end{pmatrix}=\mu J$$

或写成

$$\left.\begin{aligned} &P_pP_q^T-P_qP_p^T=0 \\ &Q_pQ_q^T-Q_qQ_p^T=0 \\ &P_pQ_q^T-P_qQ_p^T=\mu E_n \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

其中“0”表示零矩阵。(7.47)还有一式：

$$Q_pP_q^T-Q_qP_p^T=-\mu E_n$$

它可由

$$P_pQ_q^T-P_qQ_p^T=\mu E_n$$

转置而得，因此它不是独立关系式。

若将条件(7.47)式按每一个元素写出来，就是正则变换充要条件的泊松括号形式：

$$\left.\begin{aligned} &\{P_i;P_j\}=0 \\ &\{Q_i;Q_j\}=0 \\ &\{P_i;Q_j\}=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ \mu, & i=j \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{7.48}$$

或按逆变换 $x=x(y,t)$ 写出，即

$$\left.\begin{aligned} &\{p_i;p_j\}=0 \\ &\{q_i;q_j\}=0 \\ &\{p_i;q_j\}=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ \mu^{*}, & i=j \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{7.49}$$

其中 μ^* 由 $\Gamma^{-1}=x_y$ 算出，即

$$\Gamma^{-1}J(\Gamma^{-1})^T=\mu^* J$$

于是有

$$\mu^*=1/\mu \tag{7.50}$$

在天体力学中常用的正则变换往往对应

$$\mu=\mu^*=1$$

4. 正则变换的构造——生成函数

前面介绍了向空间正则变换的定义和判别方法，但从实用角度来看，构造一个正则变换（特别是构造一个有用的正则变换）显得更为重要。这里介绍 Hamilton 力学中常用的一种由生成函数（或称母函数）构造正则变换的方法。

定理 2 若存在一个数量函数 $S=S(p,Q,t)\in C^{[2]}$，而且矩阵 $(S_p)_Q$ 或 $(S_Q)_p$ 非异，即对 p，Q 的赫斯(Hesse)行列式 $\det(S_{p_iQ_j})\neq 0$，则 $2n$ 维向空间 x 与 y 之间的下列变换

$$q=-S_p(p,Q,t),\qquad P=-S_Q(p,Q,t) \tag{7.51}$$

为一正则变换，它的变换乘子 $\mu=1$，余函数 $R=S_t$。

根据正则变换的充要条件(7.33)，不难证明上述结论，详见本章参考文献[3]第七章第 3 节。上述正则变换是由函数 $S(p,Q,t)$ 构成的，因此称 S 为生成函数，显然，它是一种隐形式。这种隐形式的生成函数共有四种，即

(1) $S=S(p,Q,t)$，变换为

$$q=-S_p(p,Q,t),\qquad P=-S_Q(p,Q,t)$$

(2) $S=S(p,P,t)$，变换为

$$q=-S_p(p,P,t),\qquad Q=S_P(p,P,t) \tag{7.52}$$

(3) $S=S(q,Q,t)$，变换为

$$p=S_q(q,Q,t),\qquad P=-S_Q(q,Q,t) \tag{7.53}$$

(4) $S=S(q,P,t)$，变换为

$$p=S_q(q,P,t),\qquad Q=S_P(q,P,t) \tag{7.54}$$

这四种正则变换的乘子和余函数均为

$$\mu=1,\qquad R=S_t \tag{7.55}$$

按照定理 2 的构造方式，不存在显函数形式的生成函数，下一节将介绍从另一途径以显函数形式表达的生成函数。

7.3 显函数构造的正则变换——Lie 变换

在实际应用中，人们希望能由显函数来构造正则变换。堀源一朗(Hori)[4]和德普里(Deprit)[5]分别于 1966 年和 1969 年以不同方式把李(Lie)级数引进正则变换理论，解决了上述问题。由于他们都用李级数来构造正则变换，因此又称这种变换为 Lie 变换。他们两人的工作在原理上是一致的，结果也是等价的，但德普里的方法用起来显得方便些，又与本章要介绍的内

容有一定的连贯性，因此，关于这一内容，就以德普里的方法和结果为基础进行介绍。

1. 作为正则变换的 Lie 级数

关于 Lie 级数的原形式[6]，先作一简单介绍。若 $F(z)$ 为 n 个复变量 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 在某一域 B 内的单值解析函数，则它在 B 内任一点 P 的邻域内可展为收敛幂级数。引进一个线性微分算子 D：

$$D=\sum_{i=1}^{n}\theta_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i} \tag{7.56}$$

其中 $\theta_i(z)$ 在 P 点的邻域内也是 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的解析函数。定义如下形式的级数

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}D^kF(z) \tag{7.57}$$

此级数就称为 Lie 级数。其中

$$D^0F(z)=F(z)$$

$$DF(z)=\sum_{i=1}^{n}\theta_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}F(z)$$

$$D^2F(z)=D(DF(z))$$

$$\cdots\cdots$$

现在回到实数空间。在相空间 $x=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ 中讨论问题，p,q 是正则共轭变量，希望建立如下形式的正则变换：

$$p=p(P,Q,t),\qquad q=q(P,Q,t) \tag{7.58}$$

为此，将相应的微分算子 D 改为 L_W，有

$$L_Wf\equiv\{f;W\} \tag{7.59}$$

其中 W,f 皆为 P,Q 的数量函数，P,Q 皆为 n 维向量，L_Wf 即由生成函数 W 产生的函数 f 的 Lie 导数。(7.59)式右端的括号{ }即泊松括号，其形式见(7.38)和(7.39)式。

对任何实数 α,β 和任何函数 $f(P,Q),g(P,Q)$，算子 L_W 具有下列一些性质：

$$\left.\begin{aligned}&L_W(\alpha f+\beta g)=\alpha L_Wf+\beta L_Wg\\&L_W(fg)=fL_Wg+gL_Wf\\&L_W\{f;g\}=\{L_Wf;g\}+\{f;L_Wg\}\\&L_VL_W=L_{\{W,V\}}+L_WL_V\end{aligned}\right\} \tag{7.60}$$

其中 $V=V(P,Q)$ 可看成另一生成函数。性质一和二显然成立。而后两性质利用泊松括号的运算规则(7.42)式立即可得。

若记

$$L_W^0f=f$$

$$L_W^1f=L_Wf$$

$$L_W^2f=L_W(L_Wf)$$

$$\cdots\cdots$$

反复运用性质(7.60)式中的前三式，则对任何正整数 n 有

$$\left.\begin{aligned} &L_W^n(\alpha f+\beta g)=\alpha L_W^n f+\beta L_W^n g \\ &L_W^n(fg)=\sum_{0\leqslant m\leqslant n}\binom{n}{m} L_W^m f L_W^{n-m} g \\ &L_W^n\{f;g\}=\sum_{0\leqslant m\leqslant n}\binom{n}{m}\{L_W^m f;L_W^{n-m} g\} \end{aligned}\right\} \tag{7.61}$$

定义算子 L_W 的指数函数为

$$\exp(\varepsilon L_W)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L_W^n \tag{7.62}$$

ε 为参数。由(7.61)式可以推出如下关系：

$$\left.\begin{aligned} &\exp(\varepsilon L_W)(\alpha f+\beta g)=\alpha\exp(\varepsilon L_W)f+\beta\exp(\varepsilon L_W)g \\ &\exp(\varepsilon L_W)(fg)=[\exp(\varepsilon L_W)f]\cdot[\exp(\varepsilon L_W)g] \\ &\exp(\varepsilon L_W)\{f;g\}=\{\exp(\varepsilon L_W)f;\exp(\varepsilon L_W)g\} \end{aligned}\right\} \tag{7.63}$$

仿照原 Lie 级数的定义(7.57)式的形式，用以定义相空间 P,Q 与 p,q 之间依赖一个参数 ε 的变换，即

$$\left.\begin{aligned} &p=\exp(\varepsilon L_W)P=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L_W^n P \\ &q=\exp(\varepsilon L_W)Q=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L_W^n Q \end{aligned}\right\} \tag{7.64}$$

由(7.63)式中的第三式可得

$$\left.\begin{aligned} &\{p_j;p_k\}=\exp(\varepsilon L_W)\{P_j;P_k\}=0 \\ &\{p_j;q_k\}=\exp(\varepsilon L_W)\{P_j;Q_k\}=\delta_{jk} \\ &\{q_j;q_k\}=\exp(\varepsilon L_W)\{Q_j;Q_k\}=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.65}$$

其中

$$\delta_{jk}=\begin{cases}0, & j\neq k\\ 1, & j=k\end{cases}\quad (j,k=1,2,\cdots,n) \tag{7.66}$$

因此，由(7.64)式定义的相空间变换为一完全正则变换，即变换乘子 $\mu=1$，余函数 $R=0$。

在变换(7.64)下，对任一解析函数 $f(p,q)$ 有

$$\begin{aligned} f(p,q)&=f(\exp(\varepsilon L_W)P,\exp(\varepsilon L_W)Q)\\ &=\exp(\varepsilon L_W)f(P,Q) \end{aligned} \tag{7.67}$$

不难看出，若令 $f=W$，则有

$$W(p,q)=W(p(P,Q,\varepsilon),q(P,Q,\varepsilon))=\exp(\varepsilon L_W)W(P,Q)=W(P,Q) \tag{7.68}$$

2. 作为正则变换的 Lie 变换

针对受摄运动方程求解的需要，现在讨论 W 中显含参数 ε 的情况，即 $W=W(P,Q,\varepsilon)$。给定生成函数 $W(P,Q,\varepsilon)$，对任意函数 $f(P,Q,\varepsilon)$，定义算子 Δ_W 的运算如下：

$$\Delta_W f=L_W f+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon} \tag{7.69}$$

类似算子 L_W 的性质，有

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta_W(\alpha f+\beta g)=\alpha\Delta_W f+\beta\Delta_W g\\
&\Delta_W(fg)=f\Delta_W g+g\Delta_W f\\
&\Delta_W\{f;g\}=\{\Delta_W f;g\}+\{f;\Delta_W g\}\\
&\Delta_V\Delta_W=\Delta_W\Delta_V+I_{\epsilon\{W;V\}}+I_{\epsilon\left(\frac{\partial W}{\partial\epsilon}\ \frac{\partial V}{\partial\epsilon}\right)}
\end{aligned}\right\}\tag{7.70}
$$

同样也有

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta_W^n(\alpha f+\beta g)=\alpha\Delta_W^n f+\beta\Delta_W^n g\\
&\Delta_W^n(fg)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\Delta_W^m f\Delta_W^{n-m}g\\
&\Delta_W^n\{f;g\}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\{\Delta_W^m f;\Delta_W^{n-m}g\}
\end{aligned}\right\}\tag{7.71}
$$

由算子 Δ_W 引进 ϵ 的幂级数

$$
\left.\begin{aligned}
&E_W f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon^n}{n!}f^{(n)}(P,Q,0)\\
&f^{(n)}(P,Q,0)=[\Delta_W^n f(P,Q,\epsilon)]_{\epsilon=0}
\end{aligned}\right\}\tag{7.72}
$$

与(7.63)式类似,也有

$$
\left.\begin{aligned}
&E_W(\alpha f+\beta g)=\alpha E_W f+\beta E_W g\\
&E_W(fg)=(E_W f)\cdot(E_W g)\\
&E_W\{f;g\}=\{E_W f;E_W g\}
\end{aligned}\right\}\tag{7.73}
$$

类似于 Lie 级数定义的正则变换(7.64),引进

$$
\left.\begin{aligned}
&p=E_W P=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon^n}{n!}P^{(n)}(P,Q,0)\\
&q=E_W Q=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon^n}{n!}Q^{(n)}(P,Q,0)
\end{aligned}\right\}\tag{7.74}
$$

这就是由生成函数 $W(P,Q,\epsilon)$产生 Lie 变换。同样利用(7.73)式中的第三式容易证明该变换亦是完全正则变换,且有

$$
\begin{aligned}
f(p,q,\epsilon)&=f(E_W P,E_W Q,\epsilon)\\
&=E_W f(P,Q,\epsilon)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon^n}{n!}(\Delta_W^n f)_{\epsilon=0}
\end{aligned}\tag{7.75}
$$

3. Lie 变换在天体力学中的应用形式

由 Lie 变换定义的正则变换(7.74)是显函数形式:

$$
p=p(P,Q,\epsilon),\qquad q=q(P,Q,\epsilon)
$$

它是由显形式的生成函数 $W(P,Q,\epsilon)$构成的,但它不同于上一节用隐形式的生成函数 $S(p,Q,t)$,…构造的正则变换,它必须是一特殊的无穷级数形式,对于一般情况用起来有所不便,但对于某些问题可能例外。

在天体力学中常遇到的生成函数 $W(P,Q,\epsilon)$和 Hamilton 函数 $f(p,q,\epsilon)$,都可展为小参数 ϵ 的幂级数,即

$$W(P,Q,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}W_{n+1}(P,Q) \tag{7.76}$$

$$f(p,q,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}f_n(p,q) \tag{7.77}$$

在这种情况下，将能给出变换后函数 f 表达成新变量 P,Q 的递推公式，即解决了(7.75)式中 $(\Delta_W^n f)_{\varepsilon=0}=f^{(n)}(P,Q,0)$的计算。为此，记

$$L_{n+1}=L_{W_{n+1}} \tag{7.78}$$

于是有

$$L_W=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}L_{n+1} \tag{7.79}$$

$$L_W f(P,Q,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}L_{m+1}f_{n-m} \tag{7.80}$$

首先计算$(\Delta_W f)_{\varepsilon=0}$，有

$$\begin{aligned}(\Delta_W f)&=L_W f+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\Big[\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}L_{m+1}f_{n-m}\Big]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{n-1}}{(n-1)!}f_n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\Big[\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}L_{m+1}f_{n-m}+f_{n+1}\Big]\end{aligned}$$

若记

$$\Delta_W f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}f_n^{(1)}(P,Q)$$

则有$(n\geqslant 0)$

$$f_n^{(1)}(P,Q)=f_{n+1}(P,Q)+\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}L_{m+1}f_{n-m}(P,Q) \tag{7.81}$$

于是得

$$\begin{aligned}(\Delta_W f)_{\varepsilon=0}&=f^{(1)}(P,Q,0)\\&=f_0^{(1)}(P,Q)=f_1+L_1f_0\\&=f_1+\{f_0;W_1\}\end{aligned} \tag{7.82}$$

再计算$(\Delta_W^2 f)_{\varepsilon=0}$，同样记

$$\Delta_W^2 f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}f_n^{(2)}(P,Q)$$

则有$(n\geqslant 0)$

$$f_n^{(2)}(P,Q)=f_{n+1}^{(1)}(P,Q)+\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}L_{m+1}f_{n-m}^{(1)}(P,Q) \tag{7.83}$$

因此得

$$\begin{aligned}(\Delta_W^2 f)_{\varepsilon=0}&=f^{(2)}(P,Q,0)\\&=f_0^{(2)}(P,Q)=f_1^{(1)}+L_1f_0^{(1)}\\&=f_2+L_1f_1+L_1(f_1+L_1f_0)+L_2f_0\\&=f_2+2\{f_1;W_1\}+\{f_0;W_2\}+\{\{f_0;W_1\};W_1\}\end{aligned} \tag{7.84}$$

对任意正整数 k,记

$$\Delta_W^k f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}f_n^{(k)}(P,Q)$$

则有

$$f_n^{(k)}(P,Q)=f_{n+1}^{(k-1)}+\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}L_{m+1}f_{n-m}^{(k-1)} \tag{7.85}$$

于是得

$$\begin{aligned}(\Delta_W^k f)_{\varepsilon=0}&=f^{(k)}(P,Q,0)\\&=f_0^{(k)}(P,Q)=f_1^{(k-1)}+L_1f_0^{(k-1)}\end{aligned} \tag{7.86}$$

(7.85)和(7.86)式就是所需要的递推公式。因此,可由 W 和 f 关于 ε 展开式系数 $W_{n+1}(P,Q)$,$f_n(p,q)$计算出经 Lie 变换后 $f(p,q,\varepsilon)$表示成新变量 P,Q 的函数 $f^*(P,Q,\varepsilon)$关于 ε 展开式的系数 $f^{(n)}(P,Q,0)$。

将递推关系(7.85)和(7.86)式用于 Lie 变换(7.74)式,其中 p,q 就相当于函数 f,它们分别对应下列两级数:

$$\begin{cases}f_0=p\\f_n=0, & n\geqslant 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}f_0=q\\f_n=0, & n\geqslant 1\end{cases}$$

于是可算出变换系数 $P^{(n)}$和 $Q^{(n)}$,即

$$\left.\begin{aligned}&P^{(0)}=P\\&P^{(1)}=L_1P\\&P^{(2)}=P_1^{(1)}+L_1P_0^{(1)}=L_2P+L_1^2P\\&P^{(3)}=P_1^{(2)}+L_1P_0^{(2)}=L_3P+L_2L_1P+2L_1L_2P+L_1^3P\\&\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.87}$$

将上式中的 P 换成 Q,便得 $Q^{(n)}$的表达式。

4. 变换显含 t 的情况

对于非定常的 Hamilton 系统,往往所涉及的正则变换亦是显含 t 的,此时生成函数 $W=W(P,Q,t,\varepsilon)$. 对于这一系统,Lie 变换的形式仍为(7.74)式,只是系数显含 t,即

$$\left.\begin{aligned}p=E_WP=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}P^{(n)}(P,Q,t,0)\\q=E_WQ=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}Q^{(n)}(P,Q,t,0)\end{aligned}\right\} \tag{7.88}$$

函数的变换关系及相应系数的计算仍由(7.75)式和(7.86)式表达,只是系数显含 t,即 $f^{(k)}(P,Q,t,0)$。变换乘子仍为 $\mu=1$,余函数 R 的计算公式为[5]

$$\begin{aligned}R(P,Q,t,\varepsilon)&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left(\Delta_W^{n-1}\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\varepsilon=0}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}R^{(n)}\end{aligned} \tag{7.89}$$

其中展开式系数由下列递推公式求出：

$$\left.\begin{aligned} R^{(n)} &= S_0^{(n-1)}(P,Q,t) \\ S_{k-1}^{(0)} &= \frac{\partial W_k}{\partial t} \\ S_k^{(n)} &= S_{k+1}^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} L_{j+1} S_{k-j}^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{7.90}$$

具体写到 $R^{(3)}$ 为

$$\left.\begin{aligned} R^{(1)} &= \frac{\partial W_1}{\partial t} \\ R^{(2)} &= \frac{\partial W_2}{\partial t} + L_1\left(\frac{\partial W_1}{\partial t}\right) \\ R^{(3)} &= \frac{\partial W_3}{\partial t} + L_2\left(\frac{\partial W_1}{\partial t}\right) + L_1^2\left(\frac{\partial W_1}{\partial t}\right) + 2L_1\left(\frac{\partial W_2}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7.91}$$

7.4 Zeipel 方法

Zeipel 方法是针对 Hamilton 系统建立在用隐函数定义的正则变换基础上的一种变换方法，其特点是寻找一个特殊的生成函数 S，由其构造一正则变换，使变换后新的 Hamilton 函数出现足够的循环坐标，从而获得该系统的解。具体地说，对一受摄二体问题，若引用德洛纳变量 (L,G,H,l,g,h)，就是通过上述正则变换，使相应的 Hamilton 函数分别消除 l,g,h 这三个角坐标。消除 l（这是快变量），实质上就是分离出短周期项，而消除 g 和 h（它们都是慢变量），就是分离出长周期项。新系统中的变量只有长期变化，这相当于平均根数对应的 Hamilton 系统。但是，尽管 Zeipel 方法早在 1916 年就已提出，但对于大多数自然天体所构成的受摄系统，引用此方法并不太方便，而对人造地球卫星在地球非球形引力摄动下，引用该方法却十分方便，这才引起人们的重视，并使这一方法迅速推广，扩大了应用范围。

1. 定常 Hamilton 系统的情况

对于这类系统，以中心天体的扁率（J_2 项）摄动为背景，介绍 Zeipel 方法及其有关问题是比较理想的，这还可以和第三章的平均根数法作一相应的对比。

引用德洛纳变量 L,G,H,l,g,h，见(7.21)式，对于 J_2 项摄动，相应的 Hamilton 函数为

$$F = F_0 + F_1 \tag{7.92}$$

其中

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L^2} \tag{7.93}$$

$$F_1 = \frac{\mu^4 a_e^2 J_2}{2L^6}\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H^2}{G^2}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(1-\frac{H^2}{G^2}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+g)\right] \tag{7.94}$$

这里 f 是真近点角。F 不显含 t，是一定常 Hamilton 系统。该系统对应的正则运动方程即(7.23)式：

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial l}, & \dfrac{dl}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial L} \\ \dfrac{dG}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial g}, & \dfrac{dg}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial G} \\ \dfrac{dH}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial h}, & \dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial H} \end{cases}$$

这一问题已有一个循环坐标 h，Zeipel 变换的任务是消除 l 和 g。为了消除不同性质的变量，与平均根数法一样，需将 F 分解成不同性质的几个部分，有

$$F_1=F_{1c}(L,G,H)+F_{1s}(L,G,H,l,g) \tag{7.95}$$

其中 F_{1c} 和 F_{1s} 分别表示一阶长期部分（不包含三个角坐标）和一阶短周期部分（性质取决于快变量 l，即对时间 t 或 l 的平均值为零）。显然，F_{1l}（性质取决于慢变量 g 和 h）不存在。F_{1c} 和 F_{1s} 即第三章中的 R_{1c} 和 R_{1s}，有

$$F_{1c}=\frac{\mu^4 a_e^2 J_2}{2L^6}A(L/G)^3 \tag{7.96}$$

$$F_{1s}=\frac{\mu^4 a_e^2 J_2}{2L^6}\{A[(\frac{a}{r})^3-(L/G)^3]+B(\frac{a}{r})^3\cos 2(f+g)\} \tag{7.97}$$

其中

$$A=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H^2}{G^2}, \qquad B=\frac{3}{2}(1-\frac{H^2}{G^2}) \tag{7.98}$$

下面分两步来分别消除 l 和 g。

（1）第一次消除 l 的变换——分离短周期项

为了消除 l，Zeipel 方法采用了 7.2 中给出的隐形式的生成函数所构造的正则变换。具体地说即第四种形式：$S(q,P,t)$，相应的正则变换为

$$p=\frac{\partial S}{\partial q}, \qquad Q=\frac{\partial S}{\partial P}$$

这里

$$p=\begin{pmatrix} L \\ G \\ H \end{pmatrix}, \qquad q=\begin{pmatrix} l \\ g \\ h \end{pmatrix}, \qquad P=\begin{pmatrix} L' \\ G' \\ H' \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} l' \\ g' \\ h' \end{pmatrix} \tag{7.99}$$

变换的余函数是 S_t，但由于 Hamilton 函数的符号和正则运动方程均已变了一个符号，故新 Hamilton 函数为

$$F^*=F-S_t \tag{7.100}$$

对于 J_2 项摄动问题，F 不显含 t，相应的生成函数亦可取 $S(q,P)$，因此有 $S_t=0$。于是问题归结为寻找

$$\left.\begin{aligned} &S(L',G',H',l,g,h)=S_0+S_1+\cdots+S_j+\cdots \\ &S_j=O(\varepsilon^j) \end{aligned}\right\} \tag{7.101}$$

使新 Hamilton 函数 F^* 满足

$$F^*=\sum_{j=0}^{k}F_j^*(L',G',H',g')+\sum_{j\geq k+1}F_j^*(L',G',H',l',g') \tag{7.102}$$

$F_j^*=O(\varepsilon^j)$，k 是正整数，其值视问题的需要而定，例如一阶解，即取 $k=2$。

显然 S_0 对应无摄部分，应为恒等变换，即

$$S_0=L'l+G'g+H'h \tag{7.103}$$

而 F 又不含 h,故可假定

$$S_j=S_j(L',G',H',l,g),\quad j=1,2,\cdots \tag{7.104}$$

相应的正则变换为

$$\left.\begin{aligned} &L=L'+\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial S_2}{\partial l}+\cdots, && l'=l+\frac{\partial S_1}{\partial L'}+\frac{\partial S_2}{\partial L'}+\cdots \\ &G=G'+\frac{\partial S_1}{\partial g}+\frac{\partial S_2}{\partial g}+\cdots, && g'=g+\frac{\partial S_1}{\partial G'}+\frac{\partial S_2}{\partial G'}+\cdots \\ &H=H', && h'=h+\frac{\partial S_1}{\partial H'}+\frac{\partial S_2}{\partial H'}+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{7.105}$$

如何寻找满足上述条件的 $S(L',G',H',l,g,h)$,即 $S_1,S_2,\cdots$? 显然,应从下列关系中来确定以混合变量表达的 S,即

$$\begin{aligned} F^* &=F(L(L',G',H',l,g),G(L',G',H',l,g),H',l,g) \\ &=\sum_{j=0}^{k}F_j^*(L',G',H',g)+\sum_{j\geqslant k-1}F_j^*(L',G',H',l,g) \end{aligned} \tag{7.106}$$

为此,应按 $\varepsilon=J_2$ 的幂,将 F 对 L',G',H' 展开,有

$$\begin{aligned} &F_0^*+F_1^*+F_2^*+F_3^*+\cdots \\ &=F_0(L')+\frac{\partial F_0}{\partial L'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial S_2}{\partial l}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial S_2}{\partial l}+\cdots\right)^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F_0}{\partial L'^3}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}+\cdots\right)^3+\cdots \\ &\quad+F_1(L',G',H',l,g)+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial S_2}{\partial l}+\cdots\right)+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial g}+\frac{\partial S_2}{\partial g}+\cdots\right) \\ &\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}+\cdots\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial G'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial g}+\cdots\right)^2+\frac{\partial^2 F_1}{\partial L'\partial G'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial g}+\cdots\right)+\cdots \\ &\quad+\cdots \end{aligned} \tag{7.107}$$

其中$\frac{\partial}{\partial L'}$表示对 L 求偏导数后取 $L=L'$,其它表达形式类似,不再一一说明。该式各部分均已表达成 L',G',H',l,g 的函数,因而由此确定的 S 当然是混合变量的函数。

只需讨论一阶解,即可将变换过程表达清楚,因此,只要使 F_0^*,F_1^*,F_2^* 达到消除 l 的要求即行。比较(7.107)式两端 J_2 的同次幂,即得

$$F_0^*=F_0(L') \tag{7.108}$$

$$F_1^*=F_1(L',G',H',l,g)+\frac{\partial F_0}{\partial L'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right) \tag{7.109}$$

$$F_2^*=\frac{\partial F_0}{\partial L'}\left(\frac{\partial S_2}{\partial l}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial l}\right)^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial g}\right) \tag{7.110}$$

……

于是由(7.93)式表达的 F_0 得

$$F_0^*=\frac{\mu^2}{2L'^2} \tag{7.111}$$

关于一阶部分,由于 S_1 是待定的,故(7.109)式可分成两个部分:

$$F_1^*=F_{1c}(L',G',H')=\frac{\mu^4 a_e^2 J_2}{2L'^6}(L'/G')^3A' \tag{7.112}$$

$$0=F_{1s}+\frac{\partial F_0}{\partial L'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right) \tag{7.113}$$

由(7.113)式即可确定 S_1，即

$$\frac{\partial S_1}{\partial l}=-F_{1s}/\frac{\partial F_0}{\partial L'}$$
$$=\frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{2L'^3}\{A'[(\frac{a}{r})^3-(L'/G')^3]+B'(\frac{a}{r})^3\cos2(f'+g)\} \tag{7.114}$$

上面各式中出现的 A'，B' 表示(7.98)式中的 G，H 均换为 G'，H'，而$(\frac{a}{r})$和 f'通过 e 包含的 L，G 亦是如此，即

$$e'=[1-(G'/L')^2]^{1/2}$$

由于(7.114)式是 S_1 对 l 的偏导数，故积分该式时，各量之间的转换严格地满足二体问题的函数关系。积分得

$$S_1=\frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{2G'^3}\{A'[(f'-l)+e'\sin f']$$
$$+B'[\frac{e'}{2}\sin(f'+2g)+\frac{1}{2}\sin2(f'+g)+\frac{e'}{6}\sin(3f'+2g)]\} \tag{7.115}$$

同样可将二阶部分的(7.110)式分成两个部分，即

$$F_2^*=\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}(\frac{\partial S_1}{\partial l})^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}(\frac{\partial S_1}{\partial l})+\frac{\partial F_1}{\partial G'}(\frac{\partial S_1}{\partial g})\}_{c,l} \tag{7.116}$$

$$0=\frac{\partial F_0}{\partial L'}(\frac{\partial S_2}{\partial l})+\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}(\frac{\partial S_1}{\partial l})^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}(\frac{\partial S_1}{\partial l})+\frac{\partial F_1}{\partial G'}(\frac{\partial S_1}{\partial g})\}_s \tag{7.117}$$

两个等式右端的括号$\{\quad\}_{c,l}$和$\{\quad\}_s$分别表示括号内各项的不含快变量 l 的部分(即长期和长周期部分)和含 l 的部分(即短周期部分)。后一式就用来确定 S_2，方法与确定 S_1 相同，但对于一阶解不必具体计算它。要由(7.116)式推出 F_2^* 的具体表达式，即消除该式右端括号内含 l 的项，那么只要引用第一章求平均值的方法即可。经计算得

$$F_2^*=\frac{\mu^6 a_e^4 J_2^2}{4L'^{10}}[\frac{3}{32}(5-18\cos^2 i'+5\cos^4 i')(1-e'^2)^{-5/2}$$
$$+\frac{3}{8}(1-6\cos^2 i'+9\cos^4 i')(1-e'^2)^{-3}$$
$$-\frac{15}{32}(1-2\cos^2 i'-7\cos^4 i')(1-e'^2)^{-7/2}$$
$$+\frac{3}{16}(1-16\cos^2 i'+15\cos^4 i')e'^2(1-e'^2)^{-7/2}\cos2g] \tag{7.118}$$

其中

$$\cos i'=\frac{H'}{G'},\qquad (1-e'^2)=(\frac{G'}{L'})^2 \tag{7.119}$$

对于一阶解而言，第一次消除 l 的变换已完成，给出了生成函数 S(S_0 和 S_1)和变换后的 Hamilton 函数 F^*，即

$$F^*=F_0^*(L')+F_1^*(L',G',H')+F_2^*(L',G',H',g)$$

但是，由于变换是由隐函数构成的，除 S_1 中含有原变量 l 和 g 外，F^* 仍含有原变量 g，而问题需要 F^* 表示成新变量的函数，构成一新 Hamilton 系统。要达到这一要求并不困难，因为新旧变量之间的差别是一阶周期量。对于一阶解而言，将 F_2^* 中的 g 直接换为 g' 即行，这样引起的差别为三阶量，无需考虑。至于高阶解，这一问题同样可毫无困难地得到解决，将在后面第(4)小段中讨论。于是新 Hamilton 函数可写成

$$F^* = F_0^*(L') + F_1^*(L', G', H') + F_{2c}^*(L', G', H') + F_{2l}^*(L', G', H', g') \tag{7.120}$$

其中 F_{2c}^* 和 F_{2l}^* 分别为 F_2^* 的不含 g' 和含 g' 的部分，见(7.118)式，F_0^* 和 F_1^* 即由(7.111)和(7.112)式表达。

将 $S_1(L', G', H', l, g)$ 代入变换关系(7.105)式，即可得出用新变量表达旧变量的关系式。同样对于一阶解，关系式中出现的 l 和 g 直接换为 l' 和 g'，有

$$L = L' + \frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{4L'^3}\{(-1+3\cos^2 i')[(\frac{a'}{r'})^3 - (1-e'^2)^{-3/2}] + 3(1-\cos^2 i')(\frac{a'}{r'})^3\cos 2(f'+g')\} \tag{7.121}$$

$$G = G' + \frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{4G'^3}\{3(1-\cos^2 i')[e'\cos(f'+2g') + \cos 2(f'+g') + \frac{e'}{3}\cos(3f'+2g')]\} \tag{7.122}$$

$$H = H' \tag{7.123}$$

$$\begin{aligned} l = l' - \frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{4L'G'^3}(\frac{1}{e'})\{&(-1+3\cos^2 i')[(3-\frac{3}{4}e'^2)\sin f' + \frac{3}{2}e'\sin 2f' + \frac{1}{4}e'^2\sin 3f'] \\ &+ 3(1-\cos^2 i')[-\frac{3}{4}e'\sin 2g' + \frac{1}{8}e'^2\sin(f'-2g') - (\frac{1}{2}+\frac{5}{8}e'^2)\sin(f'+2g') \\ &+ (\frac{7}{6}-\frac{1}{24}e'^2)\sin(3f'+2g') + \frac{3}{4}e'\sin(4f'+2g') + \frac{1}{8}e'^2\sin(5f'+2g')]\} \end{aligned} \tag{7.124}$$

$$\begin{aligned} g = g' - \frac{3\mu^2 a_e^2 J_2}{4G'^4}\{&(1-5\cos^2 i')[(f'-l') + e'\sin f'] \\ &- (3-5\cos^2 i')[\frac{1}{2}\sin 2(f'+g') + \frac{e'}{2}\sin(f'+2g') + \frac{e'}{6}\sin(3f'+2g')]\} \\ + \frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{4G'^4}(\frac{1}{e'})\{&(-1+3\cos^2 i')[(3-\frac{3}{4}e'^2)\sin f' + \frac{3}{2}e'\sin 2f' + \frac{1}{4}e'^2\sin 3f'] \\ &+ 3(1-\cos^2 i')[-\frac{3}{4}e'\sin 2g' + \frac{1}{8}e'^2\sin(f'-2g') - (\frac{1}{2}+\frac{5}{8}e'^2)\sin(f'+2g') \\ &+ (\frac{7}{6}-\frac{1}{24}e'^2)\sin(3f'+2g') + \frac{3}{4}e'\sin(4f'+2g') + \frac{1}{8}e'^2\sin(5f'+2g')]\} \end{aligned} \tag{7.125}$$

$$\begin{aligned} h = h' - \frac{3\mu^2 a_e^2 J_2}{2G'^4}\cos i'\{&[(f'-l') + e'\sin f'] \\ &- [\frac{1}{2}\sin 2(f'+g') + \frac{e'}{2}\sin(f'+2g') + \frac{e'}{6}\sin(3f'+2g')]\} \end{aligned} \tag{7.126}$$

上列各式新旧变量之间的差别，即一阶短周期项 $\sigma_s^{(1)}(t)$，因此，新变量 L', G', H', l', g', h' 就相当于消除短周期项的拟平均根数，可统一记成 $\sigma'(t)$。同样，除 $\overline{L_s^{(1)}(t)} = 0$ 外，$\overline{\sigma_s^{(1)}(t)} \neq 0$，包含了一些性质取决于慢变量 g' 的长周期项，从变换角度来看，这没有任何问题。

根据上述讨论不难看出，在求 S_1 时，按二体问题关系积分是严格的，由它求出“短周期项”也就无需经过“近似”处理，对高阶项亦如此。这从数学角度来看，比第三章介绍的平均根数法清楚得多，而且对于 J_2 项摄动问题，在求高阶解时也无需展成平近点角 l 的三角级数。

由方程(7.114)求 S_1 时，可以根据某种需要增加一个与 l 无关的任意函数，对最后所需要的原变量 (L, G, H, l, g, h) 的解没有影响，关于这一点，将留给读者作为一道习题去讨论。

(2)第二次消除 g' 的变换——分离长周期项

与第一次消除 l 的变换类似，即寻找下列形式的生成函数：

$$
\left.\begin{aligned}
&S^*(L'',G'',H'',l',g',h') = S_0^* + S_1^* + \cdots + S_j^* + \cdots \\
&S_0^* = L''l' + G''g' + H''h' \\
&S_j^* = O(\varepsilon^j)
\end{aligned}\right\} \tag{7.127}
$$

使新 Hamilton 函数 F^{**} 满足

$$
\left.\begin{aligned}
&F^{**} = \sum_{j=0}^{k} F_j^{**}(L'',G'',H'') + \sum_{j\geqslant k+1} F_j^{**}(L'',G'',H'',g') \\
&F_j^{**} = O(\varepsilon^j)
\end{aligned}\right\} \tag{7.128}
$$

这里 L'',G'',H'',l'',g'',h'' 是新变量。针对(7.120)式给出的 F^*，可以假定

$$
S_j^* = S_j^*(L'',G'',H'',g'),\quad j=1,2,\cdots \tag{7.129}
$$

相应的正则变换为

$$
\left.\begin{aligned}
&L' = L'', && l'' = l' + \frac{\partial S_1^*}{\partial L''} + \frac{\partial S_1^*}{\partial L''} + \cdots \\
&G' = G'' + \frac{\partial S_1^*}{\partial g'} + \frac{\partial S_2^*}{\partial g'} + \cdots, && g'' = g' + \frac{\partial S_1^*}{\partial G''} + \frac{\partial S_2^*}{\partial G''} + \cdots \\
&H' = H'', && h'' = h' + \frac{\partial S_1^*}{\partial H''} + \frac{\partial S_2^*}{\partial H''} + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{7.130}
$$

与确定 $S(L',G',H',l,g,h)$ 的方法类似，应从下列关系中来确定 $S^*(L'',G'',H'',l',g',h')$，即

$$
\begin{aligned}
F^{**} &= F^*(L'',G'(L'',G'',H'',g'),H'',g') \\
&= \sum_{j=0}^{k} F_j^{**}(L'',G'',H'') + \sum_{j\geqslant k+1} F^{**}(L'',G'',H'',g')
\end{aligned} \tag{7.131}
$$

按 $\varepsilon=J_2$ 的幂，将 F^* 对 L'',G'',H'' 展开，得

$$
\begin{aligned}
&F_0^{**} + F_1^{**} + F_2^{**} + F_3^{**} + \cdots \\
&= F_0^*(L'') + F_1^*(L'',G'',H'') + \frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'} + \frac{\partial S_2^*}{\partial g'} + \cdots\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1^*}{\partial G''^2}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'} + \frac{\partial S_2^*}{\partial g'} + \cdots\right)^2 + \cdots \\
&+ F_2^*(L'',G'',H'',g') + \frac{\partial F_2^*}{\partial G''}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'} + \cdots\right) + F_3^* + \cdots
\end{aligned} \tag{7.132}
$$

比较该式两端 J_2 的同次幂，即得

$$
F_0^{**} = F_0^*(L'') \tag{7.133}
$$

$$
F_1^{**} = F_1^*(L'',G'',H'') \tag{7.134}
$$

$$
F_2^{**} = \frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}\right) + F_2^*(L'',G'',H'',g') \tag{7.135}
$$

……

于是由(7.111)和(7.112)两式给出的 F_0^* 和 F_1^* 得

$$
F_0^{**} = \frac{\mu^2}{2L''^2} \tag{7.136}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1^{**} &= \frac{\mu^4 a_e^2 J_2}{2L''^6}\left(\frac{L''}{G''}\right)^3 A'' \\
&= \frac{\mu^4 a_e^2 J_2}{2L''^3 G''^3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{H''^2}{G''^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.137}
$$

同样可将(7.135)式分成两部分：

$$
F_2^{**} = F_{2c}^*(L'',G'',H'')
$$

$$=\frac{\mu^6 a_e^4 J_2^2}{4L''^{10}}\Big[\frac{3}{32}(5-18\cos^2 i''+5\cos^4 i'')(1-e''^2)^{-5/2}$$
$$+\frac{3}{8}(1-6\cos^2 i''+9\cos^4 i'')(1-e''^2)^{-3}$$
$$-\frac{15}{32}(1-2\cos^2 i''-7\cos^4 i'')(1-e''^2)^{-7/2}\Big] \quad (7.138)$$

$$0=\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}\right)+F_{2l}^*(L'',G'',H'',g')$$

后一式即用来确定 S_1^*，即

$$\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}=F_{2l}^*/\left(-\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\right)$$

以 F_1^* 和 F_{2l}^* 代入积分得

$$S_1^*=-\frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{32G''^3}e''^2(1-16\cos^2 i''+15\cos^4 i'')(1-5\cos^2 i'')^{-1}\sin 2g' \quad (7.139)$$

其中 $(1-5\cos^2 i'')^{-1}$ 的出现是由

$$-\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}=-\frac{3\mu^4 a_e^2 J_2}{4L''^3 G''^4}(1-5\cos^2 i'')$$

引进的，而 $-\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}=-\frac{\partial F_1^{**}}{\partial G''}$ 就是 g'' 的一阶长期项系数，即第三章中给出的 ω_1，临界角问题就由此产生。

到此，在一阶意义下，第二次消除 g' 的变换已完成，给出了生成函数 S^*（S_0^* 和 S_1^*）和变换后的新 Hamilton 函数 F^{**}，即

$$F^{**}=F_0^{**}(L'')+F_1^{**}(L'',G'',H'')+F_2^{**}(L'',G'',H'') \quad (7.140)$$

其中 F_0^{**}，F_1^{**}，F_2^{**} 分别由(7.136)、(7.137)、(7.138)三式表达。与第一次变换类似，在一阶意义下，$S_1^*(L'',G'',H'',g')$ 中的 g' 可直接换成 g''，于是将这样的 S_1^* 代入(7.130)式，即得新旧变量之间的变换关系：

$$L'=L'' \quad (7.141)$$

$$G'=G''-\frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{16G''^3}e''^2(1-16\cos^2 i''+15\cos^4 i'')(1-5\cos^2 i'')^{-1}\cos 2g'' \quad (7.142)$$

$$H'=H'' \quad (7.143)$$

$$l'=l''+\frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{16L''^3 G''}(1-16\cos^2 i''+15\cos^4 i'')(1-5\cos^2 i'')^{-1}\sin 2g'' \quad (7.144)$$

$$g'=g''-\frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{16G''^4}\Big\{(1-5\cos^2 i'')^{-1}\Big[(1+\frac{1}{2}e''^2)-(16+19e''^2)\cos^2 i''+(15-\frac{35}{2}e''^2)\cos^4 i''\Big]$$
$$+(1-5\cos^2 i'')^{-2}\big[(-200e''^2)\cos^6 i''\big]\Big\}\sin 2g'' \quad (7.145)$$

$$h'=h''-\frac{\mu^2 a_e^2 J_2}{16G''^4}e''^2\cos i''\big[(1-5\cos^2 i'')^{-1}(11+25\cos^2 i'')+(1-5\cos^2 i'')^{-2}(-200\cos^4 i'')\big]\sin 2g''$$
$$(7.146)$$

上列各式新旧变量之间的差别，即一阶长周期项 $\sigma_l^{(1)}(t)$，因此，新变量 L''，G''，H''，l''，g''，h'' 就相当于消除全部周期项的平均根数，可统一记成 σ''。

(3)摄动解

经过两次变换给出的 F^{**} 出现了三个循环坐标，于是有三个积分：

$$\left.\begin{aligned} L'' &= L''_0 \\ G'' &= G''_0 \\ H'' &= H''_0 \end{aligned}\right\}, \tag{7.147}$$

而另三个变量的解可直接写出，即

$$\left.\begin{aligned} l'' &= l''_0 + \left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial L''}\right)(t-t_0) \\ g'' &= g''_0 + \left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial G''}\right)(t-t_0) \\ h'' &= h''_0 + \left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial H''}\right)(t-t_0) \end{aligned}\right\} \tag{7.148}$$

其中$\left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial L''}\right)$，$\left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial G''}\right)$，$\left(-\frac{\partial F^{**}}{\partial H''}\right)$都是$L''$，$G''$，$H''$的函数，当然也是常数，即长期项系数。具体公式为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F^{**}}{\partial L''} - n''\{&1+\mu^2 a_e^2 J_2\left(\frac{3}{4L''G''^3}\right)(-1+3\cos^2 i'') \\ &+(\mu^2 a_e^2 J_2)^2\left(\frac{3}{128L''G''^7}\right)[(10-60\cos^2 i''+130\cos^4 i'') \\ &+e''^2(-25+90\cos^2 i''-25\cos^4 i'')+\left(\frac{G''}{L''}\right)(16-90\cos^2 i''+144\cos^4 i'')]\} \end{aligned} \tag{7.149}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F^{**}}{\partial G''} = n''\{&\mu^2 a_e^2 J_2\left(\frac{3}{4G''^4}\right)(-1+5\cos^2 i'') \\ &+(\mu^2 a_e^2 J_2)^2\left(\frac{3}{128G''^8}\right)[(-10-36\cos^2 i''+430\cos^4 i'') \\ &+e''^2(-25+126\cos^2 i''-45\cos^4 i'')+\left(\frac{G''}{L''}\right)(24-192\cos^2 i''+360\cos^4 i'')]\} \end{aligned} \tag{7.150}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F^{**}}{\partial H''} = n''\{&\mu^2 a_e^2 J^2\left(-\frac{3}{2G''^4}\cos i''\right) \\ &+(\mu^2 a_e^2 J_2)^2\left(\frac{3}{32G''^8}\cos i''\right)[(4-40\cos^2 i'')+e''^2(-9+5\cos^2 i'') \\ &+\left(\frac{G''}{L''}\right)(12-36\cos^2 i'')]\} \end{aligned} \tag{7.151}$$

其中

$$n'' = \frac{\mu^2}{L''^3} = \frac{\mu^2}{L_0''^3} \tag{7.152}$$

上述(7.147)和(7.148)两式即平均根数$\sigma''(t)$的解，积分常数$L''_0,G''_0,H''_0,l''_0,g''_0,h''_0$就是初始平均根数$\sigma''_0$。于是原变量$L,G,H,l,g,h$(统一记成$\sigma$)的解可由变换关系来确定，即

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma'(t)+\sigma_s^{(1)}(t) \\ &= \sigma''(t)+\sigma_l^{(1)}(t)+\sigma_s^{(1)}(t) \end{aligned} \tag{7.153}$$

其中$\sigma_s^{(1)}(t)$和$\sigma_l^{(1)}(t)$分别由(7.121)～(7.126)式和(7.141)～(7.146)式中相应的项表达。在计算中有关初始平均根数$L''_0,G''_0,H''_0,l''_0,g''_0,h''_0$的处理，与第三章中有关的处理方法相同，不再重复说明。

关于J_2项的摄动解，平均根数法与Zeiple方法都是将摄动变化部分分成长期项、长周期项和短周期项三个部分，因此，结果是应该相同的。但是，在长、短周期项中分别出现一些"差别"也是可能的，例如

$$g_s^{(1)} = \omega_s^{(1)} - \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\frac{3}{8}\sin^2 i\sin 2\omega$$

$$l_s^{(1)} - M_s^{(1)} + \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\frac{3}{8}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\sin 2\omega$$

而

$$g_l^{(1)} = \omega_l^{(1)} + \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\frac{3}{8}\sin^2 i\sin 2\omega$$

$$l_l^{(1)} = M_l^{(1)} - \left(\frac{3J_2}{2p^2}\right)\frac{3}{8}\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\sin 2\omega$$

显然，上述"差别"只是一个表面现象，即部分长周期项出现的位置不一样，而对整个解是一致的。另外，在二阶长期项中，l_2 和 M_2 在形式上亦有一点差别，这是由于两者计算时分别用到的系数 n_0'' 和 $\bar{n}_0$ 相差一个二阶常数项所造成，具体形式不再写出。

最后说明一点，从前面两次变换过程来看，消除 l 和 g 的变换也可以一次进行，请见本章参考文献[7]，但最后还是要将长短周期项分开，并无实质性差别，也没有带来什么方便，本章参考文献[8]曾作过详细比较。

(4)高阶解的建立

从前面的变换过程来看，用 Zeipel 方法建立高阶解(二阶以上)，并无原则困难。但由于用了隐函数 $S(L',G',H',l,g,h)$，$S^*(L'',G'',H'',l',g',h')$构造的正则变换，给出的变换关系是混合变量的形式(即隐函数形式)，涉及到变量的另一种转换。下面针对构造 J_2 项摄动的二阶解来说明这一问题。

第一次消除 l 的变换如下：

生成函数 S 和相应的 F 和 L',G',H' 的展开式仍由(7.101)和(7.107)式表达。对于二阶解，需要确定 S_1 和 S_2 以及相应的 F_0^*,F_1^*,F_2^* 和 F_3^*，其中确定 S_1,S_2 以及 F_0^*,F_1^*,F_2^* 的表达式同前，而由(7.107)式给出 J_2^3 部分为

$$F_3^* = \left\{\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial S_2}{\partial l}\right) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F_0}{\partial L'^3}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^3 + \frac{\partial F_1}{\partial L'}\left(\frac{\partial S_2}{\partial l}\right) + \frac{\partial F_1}{\partial G'}\left(\frac{\partial S_2}{\partial g}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial G'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial g}\right)^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial L'\partial G'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial S_1}{\partial g}\right)\right\}_{c,l} \tag{7.154}$$

用 Zeipel 方法给出的结果为

$$F^* = F_0^*(L') + F_1^*(L',G',H') + F_2^*(L',G',H',g) + F_3^*(L',G',H',g) \tag{7.155}$$

对于二阶解，F_3^* 中的 g 可直接换成 g'，而 F_2^* 中的 g 换成 g'时应由下式表达：

$$F_2^*(L',G',H',g) = F_2^*(L',G',H',g') + \frac{\partial F_2^*}{\partial g'}\left(-\frac{\partial S_1}{\partial G'}\right) \tag{7.156}$$

其中增加的一项可分成两个部分，即

$$\frac{\partial F_2^*}{\partial g'}\left(-\frac{\partial S_1}{\partial G'}\right) = \left\{\frac{\partial F_2^*}{\partial g'}\left(-\frac{\partial S_1}{\partial G'}\right)\right\}_{c,l} + \left\{\frac{\partial F_2^*}{\partial g'}\left(-\frac{\partial S_1}{\partial G'}\right)\right\}_s$$

第一部分并入 F_3^* 中，而第二部分仅在确定生成函数的 S_3 中有用。因此，经处理后的 F^* 完全符合要求，换变量并未给 Zeipel 方法带来实质性困难。至于生成函数的问题，S_2 部分建立的变换关系中，l 和 g 可直接换成 l'和 g'；而在 S_1 建立的变换关系中，尽管 l 和 g 不再能直接换成 l'和 g'，亦容易解决该问题。以 L 和 l 为例，类似于对 F_2^* 的处理，有

$$L=L'+\frac{\partial S_1(L',G',H',l',g')}{\partial l'}+\frac{\partial S_2(L',G',H',l',g')}{\partial l'}$$

$$+\frac{\partial^2 S_1}{\partial l'^2}(-\frac{\partial S_1}{\partial L'})+\frac{\partial^2 S_1}{\partial g'\partial l'}(-\frac{\partial S_1}{\partial G'}) \tag{7.157}$$

$$l=l'-\frac{\partial S_1(L',G',H',l',g')}{\partial L'}-\frac{\partial S_2(L',G',H',l',g')}{\partial L'}$$

$$-\frac{\partial^2 S_1}{\partial l'\partial L'}(-\frac{\partial S_1}{\partial L'})-\frac{\partial^2 S_1}{\partial g'\partial L'}(-\frac{\partial S_1}{\partial G'}) \tag{7.158}$$

对于其它四个变量的变换关系有类似的表达式，问题全部解决。

第二次消除 g' 的变换如下：

与前面求一阶解过程相同，只是生成函数 S^* 和相应的 Hamilton 函数 F^* 应增加 S_2^* 和 F_3^{**} 部分。根据展开式(7.132)可给出

$$F_3^{**}=\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}(\frac{\partial S_2^*}{\partial g'})+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1^*}{\partial G''^2}(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'})^2+\frac{\partial F_2^*}{\partial G''}(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'})+F_3^*(L'',G'',H'',g') \tag{7.159}$$

这同样可分成两个部分，即

$$F_3^{**}=\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1^*}{\partial G''^2}(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'})^2+\frac{\partial F_2^*}{\partial G''}(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'})\}_c+F_{3c}^*(L'',G'',H'') \tag{7.160}$$

$$0=\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}(\frac{\partial S_2^*}{\partial g'})+\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1^*}{\partial G''^2}(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'})^2+\frac{\partial F_2^*}{\partial G''}(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'})\}_l+F_{3l}^*(L'',G'',H'',g') \tag{7.161}$$

由后一式确定的 S_2^* 与 S_1^* 类似，都是混合变量的函数，即

$$S_1^*=S_1^*(L'',G'',H'',g')$$

$$S_2^*=S_2^*(L'',G'',H'',g')$$

因此，由 S^* 确定的新旧变量之间的关系中有变量转换问题，与第一次消除 l 的变换类似，这也容易处理。以 G' 和 g' 为例，有

$$G=G''+\frac{\partial S_1^*(L'',G'',H'',g'')}{\partial g''}+\frac{\partial S_2^*(L'',G'',H'',g'')}{\partial g''}$$

$$+\frac{\partial^2 S_1^*}{\partial g''^2}(-\frac{\partial S_1^*}{\partial G''}) \tag{7.162}$$

$$g'=g''-\frac{\partial S_1^*(L'',G'',H'',g'')}{\partial G''}-\frac{\partial S_2^*(L'',G'',H'',g'')}{\partial G''}$$

$$-\frac{\partial^2 S_1^*}{\partial g''\partial G''}(-\frac{\partial S_1^*}{\partial G''}) \tag{7.163}$$

对其它变量亦如此。

从两次变换中处理混合变量的过程来看，尽管 Zeipel 方法是引用隐函数定义的正则变换，但就应用而言，不会给构造小参数幂级数解带来原则性困难，具体实现混合变量的转换也并不麻烦。整个消除角坐标的变换过程都是由低阶项确定高阶项，形成一个有效的递推过程。显然，若原 Hamilton 函数 F 存在 F_2, F_3 等高阶项，亦无妨，只是要求

$$F_{1l}=0$$

否则，方法将失效，这与平均根数法的要求相同。

2. 非定常 Hamilton 系统的情况

在受摄二体问题中，如存在第三体摄动，则相应的 Hamilton 函数将显含 t，且通常都与角

变量 h 有关。为了便于问题的表达，不妨假定显含 t 的部分为二阶量，即

$$F=F_0(L)+F_1(L,G,H,l,g)+F_2(L,G,H,l,g,h,n_e t) \tag{7.164}$$

读者可以从下面的讨论过程中看出，即使显含 t 的部分为一阶量亦无妨，只要满足条件

$$F_{1t}=0$$

即行。下面分两种情况考虑，即

(1)摄动天体的平运动速度 n_e 与运动天体的平运动速度 n 接近，即 $n_e t$ 与 l 相当，皆为快变量。

(2)$n_e t$ 与 g,h 相当，皆为慢变量，此时对应 $\frac{r}{r'}\ll 1$ 的情况，r' 是摄动天体到中心天体的距离。

对于第一种情况，人造地球卫星绕地球运动中，$J_{2,2}$ 项摄动即如此，见第四章 4.1。此时 $F_2=F_{2t}$，不妨写成下列形式：

$$F_{2t}=\varepsilon^2 A(L,G,H)\cos(k_1 l+k_2 g+k_3 h+k_4 n_e t) \tag{7.164}$$

其中 $k_1,k_2,k_3,k_4=0,\pm1,\pm2,\cdots$，且 $|k_1|+|k_4|\neq 0$。

在第一次消除 l 的变换中，相应的(7.117)式右端将增加两项，即 F_{2t} 和 $(-\frac{\partial S_2}{\partial t})$，有

$$\begin{aligned}0=&\frac{\partial F_0}{\partial L'}(\frac{\partial S_2}{\partial l})+\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}(\frac{\partial S_1}{\partial l})^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}(\frac{\partial S_1}{\partial l})+\frac{\partial F_1}{\partial G'}(\frac{\partial S_1}{\partial g})\}_s\\&+\varepsilon^2 A(L',G',H')\cos(k_1 l+k_2 g+k_3 h+k_4 n_e t)-\frac{\partial S_2}{\partial t}\end{aligned} \tag{7.165}$$

这是一阶线性偏微分方程，可将 S_2 分成两个部分，即

$$S_2=S_{20}(L',G',H',l,g)+S_{2t}(L',G',H',l,g,h,t) \tag{7.166}$$

有

$$0=\frac{\partial F_0}{\partial L'}(\frac{\partial S_{20}}{\partial l})+\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}(\frac{\partial S_1}{\partial l})^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}(\frac{\partial S_1}{\partial l})+\frac{\partial F_1}{\partial G'}(\frac{\partial S_1}{\partial g})\}_s \tag{7.167}$$

$$0=\frac{\partial F_0}{\partial L'}(\frac{\partial S_{2t}}{\partial l})-\frac{\partial S_{2t}}{\partial t}+\varepsilon^2 A(L',G',H')\cos(k_1 l+k_2 g+k_3 h+k_4 n_e t) \tag{7.168}$$

第一个方程确定 S_{20} 即前面已讨论过的 S_2，而增加的 S_{2t} 则由(7.168)式确定，该方程可写成下列形式：

$$n'\frac{\partial S_{2t}}{\partial l}+\frac{\partial S_{2t}}{\partial t}=\varepsilon^2 A(L',G',H')\cos(k_1 l+k_2 g+k_3 h+k_4 n_e t) \tag{7.169}$$

其中

$$n'=\mu^2/L'^3 \tag{7.170}$$

此方程的解容易给出，即

$$S_{2t}=\frac{\varepsilon^2 A(L',G',H')}{k_1 n'+k_4 n_e}\sin(k_1 l+k_2 g+k_3 h+k_4 n_e t) \tag{7.171}$$

由(7.154)式可知，这将使 F_3^* 增加下列三项：

$$\{\frac{\partial F_1}{\partial L'}(\frac{\partial S_{2t}}{\partial l})+\frac{\partial F_1}{\partial G'}(\frac{\partial S_{2t}}{\partial g})+\frac{\partial F_1}{\partial H'}(\frac{\partial S_{2t}}{\partial h})\}_{c,t}$$

因此，问题并不复杂，可以顺利得到解决。

对于第二种情况，因 $n_e t$ 是慢变量，不妨将相应的 F_2 写成下列形式：

$$
\left.\begin{aligned}
&F_2=F_{2s}(L',G',H',l,g,h,t)+F_{2l}(L',G',H',g,h,t)\\
&F_{2s}=\varepsilon^2A(L',G',H')\cos(k_1l+k_2g+k_3h+k_4n_et)\\
&F_{2l}=\varepsilon^2B(L',G',H')\cos(j_1g+j_2h+j_3n_et),\qquad j_3\neq 0
\end{aligned}\right\}\tag{7.172}
$$

其中对 F_{2s} 的处理同前，只是在一定精度要求下，如只要准到二阶周期项，则与(7.171)式相应的 S_{2t} 右端分母中的 k_4n_e 可略去。剩下的问题是对 $F_{2l}(L',G',H',g,h,t)$ 的讨论。

根据(7.172)的第三式可知，在第一次变换后，F_2^* 中增加一项 ΔF_2^*，即

$$
\Delta F_2^*(L',G',H',g',h',t)=\varepsilon^2B(L',G',H')\cos(j_1g'+j_2h'+j_3n_et)\tag{7.173}
$$

与前面讨论类似，在第二次变换中，确定 S_1^* 时，相应的方程变为

$$
\begin{aligned}
0=&\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}\right)+\frac{\partial F_1^*}{\partial H''}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial h'}\right)-\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial t}\right)+F_{2l}^*(L'',G'',H'',g')\\
&+\varepsilon^2B(L'',G'',H'')\cos(j_1g'+j_2h'+j_3n_et)
\end{aligned}\tag{7.174}
$$

同样将 S_1^* 分成两部分，即

$$
S_1^*=S_{10}^*(L'',G'',H'',g')+S_{1t}^*(L'',G'',H'',g',h',t)\tag{7.175}
$$

有

$$
0=\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\left(\frac{\partial S_{10}^*}{\partial g'}\right)+F_{2l}^*(L'',G'',H'',g')\tag{7.176}
$$

$$
0=\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\left(\frac{\partial S_{1t}^*}{\partial g'}\right)+\frac{\partial F_1^*}{\partial H''}\left(\frac{\partial S_{1t}^*}{\partial h'}\right)-\left(\frac{\partial S_{1t}^*}{\partial t}\right)+\varepsilon^2B(L'',G'',H'')\cos(j_1g'+j_2h'+j_3n_et)\tag{7.177}
$$

第一个方程确定 S_{10}^* 即前面定常情况中已讨论过的 S_1^*，而确定 S_{1t}^* 的方程(7.177)可表示成下列形式：

$$
n_g\frac{\partial S_{1t}^*}{\partial g'}+n_h\frac{\partial S_{1t}^*}{\partial h'}+\frac{\partial S_{1t}^*}{\partial t}=\varepsilon^2B(L'',G'',H'')\cos(j_1g'+j_2h'+j_3n_et)\tag{7.178}
$$

其中

$$
n_g=-\frac{\partial F_1^*}{\partial G''},\qquad n_h=-\frac{\partial F_1^*}{\partial H''}\tag{7.179}
$$

相应的解也容易得到，即

$$
S_{1t}^*=\frac{\varepsilon^2B(L'',G'',H'')}{j_1n_g+j_2n_h+j_3n_e}\sin(j_1g'+j_2h'+j_3n_et)\tag{7.180}
$$

由(7.159)式可知，这将使 F_3^{**} 和 S_2^* 增加一些与 S_{1t}^* 有关的项，这里不再列出。因此，问题亦同样得到解决。

根据以上讨论可以看出，在一般情况下，引用 Zeipel 方法给出准到 $O(\varepsilon^4)$ 阶的摄动解并无实质性困难。但是，对于自然天体的运动，其相应的 Hamilton 函数 F 通常并不像人造地球卫星运动那样，清楚地分成 F_0,F_1(只有 F_{1l} 和 F_{1s})，$F_2,\cdots,F_j=O(\varepsilon^j)$，$j=0,1,2,\cdots$，引用 Zeipel 方法有些不便。这就是该方法于 1916 年提出后，并未立即引起重视的原因。

7.5 Hori-Deprit 方法

尽管对于一般受摄二体问题，仅存在保守力摄动时(当然，要满足某种条件，前面已提过)，引用 Zeipel 方法并无实质性困难，但毕竟是隐形式的变换，有个换变量问题，这是一缺陷。因

此引用以显形式的生成函数定义的正则变换(即前面 7.3 中介绍的 Lie 变换)似乎势在必然，我们不妨称其为 Hori-Deprit 方法。

仍旧以中心天体非球形引力位中的 J_2 项摄动为背景来介绍 Lie 变换应用的具体过程，这是一定常 Hamilton 系统。至于非定常情况，并无实质性差别，情况与 Zeipel 方法的处理类似。

基本变量即德洛纳变量 L,G,H,l,g,h，分别记作 p 和 q，相应的 Hamilton 函数即前面的(7.92)～(7.94)式，但写法稍有不同，这里的形式为

$$F=F_0+J_2F_1 \tag{7.181}$$

$$F_0=\frac{\mu^2}{2L^2} \tag{7.182}$$

$$F_1=\frac{\mu^4a_e^2}{2L^6}\left[A\left(\frac{a}{r}\right)^3+B\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos2(f+g)\right] \tag{7.183}$$

即小参数 $\varepsilon=J_2$ 已单独列出。相应的生成函数可写成下列形式：

$$W(P,Q,\varepsilon)=W_1(P,Q)+J_2W_2(P,Q)+\frac{J_2^2}{2}W_3(P,Q)+\cdots \tag{7.184}$$

这里 P 和 Q 即新变量 L',G',H',l',g',h'。Lie 变换的形式已在前面 7.3 中给出，见(7.74)式和(7.87)式，即

$$\left.\begin{aligned}p&=E_WP=P^{(0)}+J_2P^{(1)}+\frac{J_2^2}{2}P^{(2)}+\cdots\\ q&=E_WQ=Q^{(0)}+J_2Q^{(1)}+\frac{J_2^2}{2}Q^{(2)}+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.185}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&P^{(0)}=P\\ &P^{(1)}=\frac{\partial W_1}{\partial Q}\\ &P^{(2)}=\frac{\partial W_2}{\partial Q}+\{\frac{\partial W_1}{\partial Q};W_1\}\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.186}$$

$$\left.\begin{aligned}&Q^{(0)}=Q\\ &Q^{(1)}=-\frac{\partial W_1}{\partial P}\\ &Q^{(2)}=-\frac{\partial W_2}{\partial P}+\{-\frac{\partial W_1}{\partial P};W_1\}\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.187}$$

这里要将 $\frac{\partial W_n}{\partial P},\frac{\partial W_n}{\partial Q}$ 理解为三维列向量，即

$$\frac{\partial W_n}{\partial P}=\begin{pmatrix}\frac{\partial W_n}{\partial L'}\\ \frac{\partial W_n}{\partial G'}\\ \frac{\partial W_n}{\partial H'}\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial W_n}{\partial Q}=\begin{pmatrix}\frac{\partial W_n}{\partial l'}\\ \frac{\partial W_n}{\partial g'}\\ \frac{\partial W_n}{\partial h'}\end{pmatrix} \tag{7.188}$$

变换后的新 Hamilton 函数为

$$F^*(P,Q,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}F^{(n)}(P,Q,0) \tag{7.189}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&F^{(0)}=F_0(P,Q)\\
&F^{(1)}=L_1F_0(P,Q)+F_1(P,Q)\\
&F^{(2)}=L_2F_0(P,Q)+L_1^2F_0(P,Q)+2L_1F_1(P,Q)+F_2(P,Q)\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{7.190}$$

这里

$$F_0(P,Q)=F_0(L')=\frac{\mu^2}{2L'^2} \tag{7.191}$$

1. 第一次消除 l' 的变换过程

显然可假定生成函数 $W=W(L',G',H',l',g';\epsilon)$，于是变换关系(7.185)的具体形式为

$$\left.\begin{aligned}
&L=L'+J_2\frac{\partial W_1}{\partial l'}+\cdots, \qquad && l=l'-J_2\frac{\partial W_1}{\partial L'}-\cdots\\
&G=G'+J_2\frac{\partial W_1}{\partial g'}+\cdots, && g=g'-J_2\frac{\partial W_1}{\partial G'}-\cdots\\
&H=H', && h=h'-J_2\frac{\partial W_1}{\partial H'}-\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{7.192}$$

变换后的新 Hamilton 函数为

$$F^*=F_0^*+J_2F_1^*+\frac{J_2^2}{2}F_2^*+\cdots$$

为了使 $F^*=F^*(L',G',H',g';\varepsilon)$，即消除 l'，则根据(7.190)式有

$$F_0^*=F_0(L')=\frac{\mu^2}{2L'^2} \tag{7.193}$$

$$F_1^*=F_{1c}(L',G',H')=\frac{\mu^4a_e^2}{2L'^3G'^3}A' \tag{7.194}$$

$$0=L_1F_0(L')+F_{1s}(L',G',H',l',g') \tag{7.195}$$

$$\begin{aligned}
F_2^*&=[L_1(L_1F_0)+2L_1F_1]_{c,l}\\
&=[\{F_1+F_{1c};W_1\}]_{c,l}
\end{aligned} \tag{7.196}$$

$$0=L_2F_0(L')+[\{F_1+F_{1c};W_1\}]_s \tag{7.197}$$

因

$$L_1F_0(L')=\frac{\partial F_0}{\partial L'}\left(\frac{\partial W_1}{\partial l'}\right) \tag{7.198}$$

于是由(7.195)式确定 W_1 的计算与 Zeipel 方法中计算 S_1 的积分形式完全相同，仅差一个系数 J_2，且 l 和 g 均为新变量 l' 和 g'，有

$$\begin{aligned}
W_1=\frac{\mu^2a_e^2}{2G'^3}\{&A'[(f'-l')+e'\sin f']\\
&+B'[\frac{e'}{2}\sin(f'+2g')+\frac{1}{2}\sin 2(f'+g')+\frac{e'}{6}\sin(3f'+2g')]\}
\end{aligned} \tag{7.199}$$

对于一阶解，剩下的只是计算(7.195)式右端项，即

$$\{F_1+F_{1c};W_1\}=\frac{\partial(F_1+F_{1c})}{\partial L'}\frac{\partial W_1}{\partial l'}-\frac{\partial(F_1+F_{1c})}{\partial l'}\frac{\partial W_1}{\partial L'}+\frac{\partial(F_1+F_{1c})}{\partial G'}\frac{\partial W_1}{\partial g'}-\frac{\partial(F_1+F_{1c})}{\partial g'}\frac{\partial W_1}{\partial G'} \tag{7.200}$$

同样用第一章中求平均值的方法，即可给出$[\{F_1+F_{1c};W_1\}]_{c,l}$，经计算得

$$\begin{aligned}F_2^* = \frac{\mu^6 a_e^4}{2L'^{10}}\Big[&\frac{3}{32}(5-18\cos^2 i'+5\cos^4 i')(1-e'^2)^{-5/2}\\ &+\frac{3}{8}(1-6\cos^2 i'+9\cos^4 i')(1-e'^2)^{-3}\\ &-\frac{15}{32}(1-2\cos^2 i'-7\cos^4 i')(1-e'^2)^{-7/2}\\ &+\frac{3}{16}(1-16\cos^2 i'+15\cos^4 i')e'^2(1-e'^2)^{-7/2}\cos 2g'\Big]\end{aligned} \tag{7.201}$$

显然，它与 Zeipel 方法给出的 F_2^* 相差一个$\frac{J_2^2}{2}$的因子，见(7.118)式，但这里 F_2^* 包含的 g 已是 g'。到此给出

$$F^*(L',G',H',g')=F_0^*(L')+J_2F_1^*(L'',G'',H'')+\frac{J_2^2}{2}F_2^*(L',G',H',g')+\cdots \tag{7.202}$$

第二次消除 g''的变换过程。

同样将新变量记作 L'',G'',H'',l'',g'',h''，生成函数和变换后的新 Hamilton 函数分别记作 W^* 和 F^{**}。显然可以假定 $W^*=W^*(L'',G'',H'',g'';\varepsilon)$，相应的变换关系为

$$\left.\begin{aligned}&L'=L'', && l'=l''-J_2\frac{\partial W_1^*}{\partial L''}-\cdots\\ &G'=G''+J_2\frac{\partial W_1^*}{\partial g''}+\cdots, && g'=g''-J_2\frac{\partial W_1^*}{\partial G''}-\cdots\\ &H'=H'', && h'=h''-J_2\frac{\partial W_1^*}{\partial H''}-\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.203}$$

新 Hamilton 函数为

$$F^{**}=F^{(0)}+J_2F^{(1)}+\frac{J_2^2}{2}F^{(2)}+\cdots \tag{7.204}$$

其中的系数 $F^{(0)},F^{(1)},F^{(2)},\cdots$分别由下列各式表达：

$$\left.\begin{aligned}&F^{(0)}=F_0^*(L'')\\ &F^{(1)}=L_1F_0^*+F_1^*(L'',G'',H'')\\ &F^{(2)}=L_2F_0^*+L_1^2F_0^*+2L_1F_1^*+F_2^*(L'',G'',H'',g'')\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.205}$$

因假定 W_n^* 不含 l''，于是有

$$L_nF_0^*=0,\qquad n=1,2,\cdots$$

由此可得消除 g''后的 F^{**}和确定 W^* 的关系为

$$F_0^{**}=\frac{\mu^2}{2L''^2} \tag{7.206}$$

$$F_1^{**}=F_1^*(L'',G'',H'')=\frac{A''}{2L''^3G''^3} \tag{7.207}$$

$$F_2^{**}=F_{2c}^*(L'',G'',H'')$$

$$
=\frac{\mu^6 a_e^4}{2L''^{10}}\left[\frac{3}{32}(5-18\cos^2 i''+5\cos^4 i'')(1-e''^2)^{-5/2}+\frac{3}{8}(1-6\cos^2 i''+9\cos^4 i'')(1-e''^2)^{-3}\right.
$$

$$
\left.-\frac{15}{32}(1-2\cos^2 i''-7\cos^4 i'')(1-e''^2)^{-7/2}\right] \tag{7.208}
$$

$$
0=2\,\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\left(\frac{\partial W_1^*}{\partial g''}\right)+F_{2l}^*(L'',G'',H'',g'') \tag{7.209}
$$

……

(7.209)式即用来确定 W_1^*，有

$$
\begin{aligned}
W_1^* &= \int^{g''}\left[\frac{1}{2}F_{2l}^*/\left(-\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\right)\right]\mathrm{d}g'' \\
&= -\frac{\mu^2 a_e^2}{32\,G''^3}e''^2(1-16\cos^2 i''+15\cos^4 i'')(1-5\cos^2 i'')^{-1}\sin 2g''
\end{aligned} \tag{7.210}
$$

这与 Zeipel 方法给出的 S_1^* 相同，只是系数 J_2 已提出，且 g' 已是 g''。

到此，两次变换完成，将 W_1 和 W_1^* 分别代入变换关系(7.192)和(7.203)式，即得一阶短周期项 $\sigma_s^{(1)}(t)$和一阶长周期项 $\sigma_l^{(1)}(t)$。最后，“平均根数”σ''的解由 $F^{**}(L'',G'',H'')$给出，与 Zeipel 方法得到的结果完全相同，这里不再重复列出。

根据上述过程可以看出，其明显的优点是变换为显函数形式，而级数展开的各次幂的系数有规则的递推关系，便于机器运算，即利用计算机推导摄动解(通常要求展成平近点角 l 的三角级数，否则计算机推导不太方便)。但是，就具体应用而言，对构造一阶或二阶摄动解，尽管 Zeipel 方法有新旧变量的转换问题，却仍比 Lie 变换稍为简单些，即中间推导过程的运算涉及的项数比 Lie 变换少，读者仔细比较一下是不难得出这一结论的，当然，亦可分别采用两种变换先后消除 l 和 g 来构造级数解[9]。至于非定常系统问题，处理方法与 Zeipel 方法类似，没有任何困难。

7.6 通约奇点问题

根据前面两节的结果可以看出，小 e 小 i 问题和通约问题依然存在。前者见解中 $\sigma_s^{(1)}(t)$和 $\sigma_l^{(1)}$的表达式，而后者见生成函数 S_1,S_1^*，或 W_1,W_1^* 以及非定常情况下的 $S_{2l},S_{1l}^*,\cdots$。关于小 e 小 i 问题，它仍然是变量选择问题，即三个角变量 l,g,h 就是椭圆轨道根数 M,ω,Ω。因此，只要改用无奇点正则共轨变量，仍引用 Zeipel 方法或 Hori-Deprit 方法即可解决此问题，详见本章参考文献[10]。关于通约奇点问题，尽管前面第六章中已作了初步讨论，给出了这类奇点对应的运动特征——轨道共振的天平动现象，并在此基础上又给出了消除这类奇点的拟平均根数法。但这里将从变换方法的角度来讨论该问题还是有必要的，它可以使读者对通约奇点问题有更清楚的认识。

1. 通约问题的 Hamilton 系统

根据前面两节的讨论，对于定常情况，如 J_2 项摄动，消除快变量 l 后的 Hamilton 函数为

$$
F^*=F_0^*(L')+F_1^*(L',G',H')+F_{2c}^*(L',G',H')+F_{2l}^*(L',G',H')\cos 2g' \tag{7.211}
$$

为了讨论方便，这里将原 F_{2l}^* 中的 $\cos 2g'$ 单独提了出来。若同时考虑中心天体非球形部分的 J_4

项摄动，F^* 仍保持上述形式。对于非定常情况，如中心天体非球形部分的 $J_{2,2}$ 项摄动，或第三体摄动，当同时考虑 J_2 项摄动时，若在第一次变换消除快变量 l 的同时，将单独以慢变量 g 和 h 形式出现的长周期项也消除掉，仅保留主要通约项，则有

$$F^* = F_0^*(L') + F_1^*(L', G', H') + F_{2c}^*(L', G', H') + F_{2r}^*(L', G', H')\cos 2(ql' - pl_e + p\beta) \tag{7.212}$$

其中 $\beta = (g' + h') - (g_e + h_e)$，$l_e, g_e, h_e$ 是摄动天体对应的三个角变量，有

$$l_e = n_e(t - t_0) \tag{7.213}$$

为了简便，这里取 $t = t_0$，$l_e = 0$，F_{2r}^* 即主要通约项，与之对应地有

$$\left.\begin{aligned} qn' - pn_e &\approx 0 \\ n' &= \mu^2 / L'^3 \end{aligned}\right\} \tag{7.214}$$

p 和 q 是正整数，p/q 是相应的通约比，例如对于 J_{22} 项摄动，有 $p = q = 1$。这里取 $\cos 2(ql' - pl_e + p\beta)$ 的目的是为了与(7.211)式中的 $\cos 2g'$ 对应，若主要通约项是 $\cos 2(ql' - pl_e + p\beta)$ 的形式，亦可以使两者统一，只要对(7.211)式相应的系统作简单的正则变换即可，该变换为

$$G'' = \frac{1}{2}G', \qquad g'' = 2g'$$

对于前一种情况，通约现象表现在 $\partial F_1^* / \partial G' = 0$，即 $1 - 5\cos^2 i' = 0$，这就是临界角问题，而后一种情况的通约对应 $\frac{n'}{n_e} - \frac{p}{q}$。对于这两种情况，按上两节的变换方法构造小参数 ε 的幂级数解时，均出现如上小分母，下面将进一步讨论该问题。

上述两种通约情况都可以简化为一个自由度系统，而且相应的 F^* 还可以写成同一形式。对于第一种情况，有两个循环坐标 l' 和 h'，因此存在两个积分，即

$$L' - L'_0, \qquad H' - H'_0$$

于是简化成一个自由度 (G', g') 系统：

$$F^*(G', g') = F_1^*(G') + F_{2c}^*(G') + F_{2l}^*(G')\cos 2g' \tag{7.215}$$

原(7.211)式右端的 $F_0^*(L')$ 已略去，它对讨论 (G', g') 问题无用。若令

$$y = G', \qquad x = g' \tag{7.216}$$

则上述 F^* 可写成下列形式：

$$F(y, x) - A_0(y) + A_1(y)\cos 2x \tag{7.217}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A_0(y) &= F_1^*(y) + F_{2c}^*(y) \\ A_1(y) &= F_{2l}^*(y) \end{aligned}\right\} \tag{7.218}$$

有

$$|A_1| / |A_0| = O(\varepsilon_1) \tag{7.219}$$

这里 $\varepsilon_1 = J_2$。

对于第二种情况，引进下列正则共轭变量：

$$\left.\begin{aligned} L'' &- L'/q, & l'' &= (ql' - pl_e) + p\beta \\ G'' &= G' - pL'', & g'' &= g' \\ H'' &= H' - PL'', & h'' &= h' \end{aligned}\right\} \tag{7.220}$$

相应的 Hamilton 函数（仍记为 F^*）变为

$$
\left.\begin{aligned}
&F^* = F_0^*(L'') + F_1^*(L'',G'',H'') + F_{2c}^*(L'',G'',H'') + F_{2r}^*(L'',G'',H'')\cos 2l'' \\
&F_0^* = \frac{\mu^2}{2q^2 L''^2} + pn_e L''
\end{aligned}\right\} \tag{7.221}
$$

通约现象则表现在$\frac{\partial F_0^*}{\partial L''}=0$，即 $qn''-pn_e=0$，$n''=\mu^2/q^3L''^3=\mu^2/L'^3$。这一新系统同样有两个循环坐标 g''和 h''，存在两个积分：

$$G''=G''_0, \qquad H''=H''_0$$

因此，该系统亦可简化成一个自由度(L'',l'')系统：

$$F^*(L'',l'')=F_0^*(L'')+F_1^*(L'')+F_{2c}^*(L'')+F_{2r}^*(L'')\cos 2l'' \tag{7.222}$$

同样令

$$y=L'', \qquad x=l'' \tag{7.223}$$

则 F^* 可写成下列形式：

$$F(y,x)=A_0(y)+A_1(y)\cos 2x \tag{7.224}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&A_0(y)=F_0^*(y)+F_1^*(y)+F_{2c}^*(y) \\
&A_1(y)=F_{2r}^*(y)
\end{aligned}\right\} \tag{7.225}
$$

有

$$|A_1|/|A_0|=O(F_{2r}^*/F_0^*)=O(\varepsilon_2) \tag{7.226}$$

这里 ε_2 是摄动量级，对于 $J_{2,2}$项摄动，即 $J_{2,2}$，对于第三体摄动，若$\frac{r}{r'}\ll 1$，即 ε_2 对应$\frac{m'}{M}(\frac{r}{r'})^3$，$m'$和 M 分别为摄动天体和中心天体的质量。因通常 ε_2 较小，故在上述 Hamilton 函数中列为二阶项，即 F_2^*。若相应的摄动量级较大，列入 F_1^* 亦无妨，即 F_{2r}^*改写为 F_{1r}^*。显然，它并不影响上述讨论，即(7.224)和(7.226)式同样成立。

对于上述第一种情况，只考虑 J_2 项摄动时，有

$$A_1(y)<0$$

而同时考虑 J_2 和 J_4 项摄动时，有可能使

$$A_1(y)>0$$

对于地球情况即如此[3]。对于第二种情况，有

$$A_1(y)>0$$

为了使下面的讨论同时适用于 $A_1(y)$的两种可能，令

$$\xi=x+\frac{\pi}{4}[\mathrm{sgn}(A_1)] \tag{7.227}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&A(y)=|A_1(y)| \\
&B(y)=A_0(y)-|A_1(y)|
\end{aligned}\right\} \tag{7.228}
$$

其中 sgn(A_1)是符号函数：

$$\mathrm{sgn}(A_1)=\begin{cases}-1, & A_1<0 \\ \;\;1, & A_1>0\end{cases} \tag{7.229}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
A_1\cos 2x &= |A_1|\mathrm{sgn}(A_1)\cos 2x \\
&= -|A_1|\cos 2\xi
\end{aligned} \tag{7.230}
$$

在上述变换下，系统 $F(y,x)$ 变为 $F(y,\xi)$，并有

$$F(y,\xi)=(A_0-|A_1|)+|A_1|(1-\cos 2\xi)$$

$$=B(y)+2A(y)\sin^2\xi \tag{7.231}$$

$$A(y)/|B(y)|=O(\varepsilon) \tag{7.232}$$

这里已将上述两种通约情况对应的 ε_1 和 ε_2 统一记成 ε。两种通约情况的小分母均对应

$$B'(y)=\frac{\partial B}{\partial y}\approx 0 \tag{7.233}$$

2. 通约情况下小参数幂级数解的构造

若用前两节的变换方法(例如 Zeipel 方法)，按 ε 的幂构造级数解，新变量记作 y',ξ'，相应的生成函数和变换后的 Hamilton 函数分别为

$$S=y'\xi+S_1(y',\xi)+\cdots$$

$$F^*=F_0^*(y')+F_1^*(y')+\cdots$$

有

$$F_0^*(y')=B(y')$$

$$F_1^*(y')=A(y')$$

$$0=\frac{\partial F_0^*}{\partial y'}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi}\right)-A(y)\cos 2\xi$$

$$\cdots\cdots$$

确定 S_1 的方程为

$$\frac{\partial S_1}{\partial \xi}=\frac{A(y')}{B'(y')}\cos 2\xi$$

$$B'(y')=\partial F_0^*/\partial y'$$

于是小分母 $B'(y')\approx 0$ 出现在生成函数 S_1 中。若同样采用 Zeipel 方法，但改按 $\varepsilon^{1/2}$ 幂构造级数解，那将有不同结果。此时有

$$S=y'\xi+S_{1/2}(y',\xi)+S_1(y',\xi)+\cdots \tag{7.234}$$

相应的变换关系为

$$\left.\begin{aligned} y&=y'+\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}+\cdots \\ \xi&=\xi'-\frac{\partial S_{1/2}}{\partial y'}-\cdots \end{aligned}\right\} \tag{7.235}$$

$S_{1/2},S_1,\cdots$ 由变换后的 Hamilton 函数中不出现角变量 ξ 的要求来确定。相应的关系为

$$F^*=F_0^*+F_1^*+\cdots$$

$$=B(y')+B'\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}+\frac{\partial S_1}{\partial \xi}+\cdots\right)+\frac{1}{2}B''\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$+2A(y')\sin^2\xi+\cdots \tag{7.236}$$

显然，若 B' 的量级明显大于 $\varepsilon^{1/2}$，则属正常情况，无小分母问题，也不必按 $\varepsilon^{1/2}$ 构造级数解。因此，可假定

$$B'(y)=O(\varepsilon^{1/2}) \tag{7.237}$$

若其量级更小亦无妨。比较(7.236)式两端 $\varepsilon^{1/2}$ 的同次幂，得

$$F_0^* = B(y') \tag{7.238}$$

$$F_1^* = B'\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{2}B''\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}\right)^2 + 2A(y')\sin^2\xi \tag{7.239}$$

……

注意，对于上述两种通约问题，均有 $B''>0$。(7.329)式可按下列形式分成两部分，即让

$$F_1^* = A(y')$$

其余各项用来确定 $S_{1/2}$。但为了讨论清楚起见，也可以分成下列两个部分：

$$F_1^*(y') = 0 \tag{7.240}$$

$$\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{2B'}{B''}\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}\right) + \frac{4A}{B''}\sin^2\xi = 0 \tag{7.241}$$

若令

$$\left.\begin{aligned} &P = B'/B'' \\ &\frac{4A}{B''} = \frac{B'^2}{B''^2}\cdot\frac{4AB''}{B'^2} = P^2\alpha^{-2} \end{aligned}\right\} \tag{7.242}$$

有

$$|\alpha| = \frac{|B'|}{2\sqrt{AB''}} \tag{7.243}$$

则(7.241)式变为

$$\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}\right)^2 + 2P\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}\right) + P^2\alpha^{-2}\sin^2\xi = 0$$

解为

$$\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi}\right) = \left[1 \pm \sqrt{1-\alpha^{-2}\sin^2\xi}\right]P \tag{7.244}$$

若要 $S_{1/2}$ 能够确定，则应满足

$$1-\alpha^{-2}\sin^2\xi \geqslant 0 \tag{7.245}$$

由上述过程可以看出，B' 不再出现于生成函数 $S_{1/2}$ 的分母中，对于 $S_1, S_{3/2}, \cdots$ 亦如此，这说明按 $\varepsilon^{1/2}$ 的幂构造级数解的确能够消除通约奇点。但是，组成 $S_{1/2}, S_1, \cdots$ 的项不再是简单的三角函数，而是椭圆函数，解的结构太复杂，不便于实际应用。尽管如此，上述变换方法却能够进一步地证明通约奇点是可以消除的，说明这类奇点仅与所采用的方法有关。

3. 通约情况对应的运动特征

首先由(7.244)式及参数 P 的含义可以看出

$$\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \xi} = O(B') \tag{7.246}$$

因此，当 B' 的量级更小时，对问题的结论无影响，只是相应周期项的量级亦随之减小。这表明通约情况出现时，相应周期项振幅的增大有一限制，最大的量级仅为 $\varepsilon^{1/2}$。当 B' 的量级由 $\varepsilon^{1/2}$ 趋于零时，振幅不是再继续增大，而是随之减小，这与第六章的结论相符，此即通约情况下轨道变化的一个基本特征。

再看条件(7.245)，它应反映实际运动状态。那么，当$|\alpha|>1$时，ξ的变化不受限制，当$|\alpha|<1$时，ξ的变化要受到限制，而$|\alpha|=1$则为临界状态。ξ的变化即反映了前面两种通约情况中角变量g'和l''的变化，而g'和l''正是前面第六章6.2中所说的共振角变量。根据(7.243)式可知，$|\alpha|=1$对应$|B'|=O(\varepsilon^{1/2})$；$|\alpha|>1$对应$B'$的量级大于$\varepsilon^{1/2}$，此时运动属正常状态；而$|\alpha|<1$对应$B'$的量级小于$\varepsilon^{1/2}$，且可趋于零，这正是前面第六章6.2中给出的天平动现象，即在$|\alpha|<1$的范围内，g'和l''的变化呈现摆动状态。

上述特征是从变换方法的角度，根据消除通约奇点后级数解的结构而获得的结论，进一步证实了第六章中的结果，使我们更清楚地了解到通约问题的实质及其相应的运动特征。

7.7 一般变换方法

无论是Zeipel方法还是Hori-Deprit方法，从数学角度来看，显然要比第三章介绍的平均根数法清楚得多，而且构造级数解的过程也明显地简单。简单的原因显然是采用了由生成函数构造正则变换的方法，把各根数的变化通过一个生成函数来表达。但是，这付出的代价是放弃了引用既直观又具有明显几何意义的椭圆根数作为基本变量，而必须引用正则共轭变量。尽管两种变量之间的变换关系还是简单的，但总有些不便，而且对非保守系统不适用，即便形式上推广到耗散系统，正则变换的优点仍然消失。因此，为了使其适用性更广，又保持这些变换方法的独特构思(寻找特殊的变换，简化动力系统，直至给出摄动解)，曾有过推广Lie变换的方法[1]，使其适用于非保守系统。但从应用角度来看，Lie变换本身并不简单，局限于其原有的变换形式没有必要，而真正有意义的只是通过变换简化动力系统这一关键之处。作者根据这一特点作了一般性的推广[12]~[14]，本节就介绍这一内容。

1. 方法的基本原理

一个具有n个自由度的力学系统，若用坐标矢量和速度矢量(或类似的变量)作为基本变量，则对应的运动方程构成一个$2n$阶的常微分方程组。对一受摄二体问题，相应的$n=3$，若运动天体的轨道用变化椭圆来描述，就可选取相应的椭圆根数作为基本变量，并记X和x分别为三个“角动量”和三个角变量，即

$$X=\begin{pmatrix}a\\e\\i\end{pmatrix},\qquad x=\begin{pmatrix}\Omega\\\omega\\M\end{pmatrix}\tag{7.247}$$

并记

$$\sigma=\begin{pmatrix}X\\x\end{pmatrix}\tag{7.248}$$

则相应的$2n$阶摄动运动方程组可写为

$$\frac{d\sigma}{dt}=f(\sigma,t;\varepsilon)\tag{7.249}$$

其中ε是摄动小参数，右函数f为$2n$(这里$2n=6$)维向量函数。根据前面几章的讨论可知，右

函数 f 可展成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&f(\sigma,t;\varepsilon)=f_0(X)+\sum_{k=1}^{N}f_k(X,x,t;\varepsilon^k)\\&f_k=O(\varepsilon^k)\end{aligned}\right\}\tag{7.250}$$

通常 N 取有限值，例如讨论 J_2 项摄动时，$N=1$。

若方程组(7.249)的解能用周期项和随时间 t 线性“增长”的长期项组成，亦可用变换方法直接求解，即使长期项随时间 t 的变化不是线性的，也可通过变换分离出周期项，以达到简化上述方程的目的。相应的变换关系可取为

$$\sigma=\sigma'+\sum_{m\geqslant1}\sigma_s^{(m)}(X',x,t;\varepsilon^m)\tag{7.251}$$

或

$$\sigma=\sigma'+\sum_{m\geqslant1}\sigma_s^{(m)}(X',x',t;\varepsilon^m)\tag{7.252}$$

其中 σ' 为新变量：

$$\sigma'=\begin{pmatrix}X'\\x'\end{pmatrix}\tag{7.253}$$

$\sigma_s^{(m)}$ 为 m 阶周期项，相应地记为

$$\sigma_s^{(m)}=\begin{pmatrix}X_s^{(m)}\\x_s^{(m)}\end{pmatrix}\tag{7.254}$$

这里的 $X_s^{(m)}$ 和 $x_s^{(m)}$ 与前面正则变换方法中的生成函数 S 类似，都是待定的，在构造级数解的过程中确定。

上面第一种变换关系(7.251)是由混合变量组成的隐函数形式，类似于 Zeipel 变换，而后一种变换则为显函数形式，类似于 Lie 变换。变换后，新变量所满足的方程可写成下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial\sigma'}{\partial\sigma}\right)f(\sigma,t;\varepsilon)+R\tag{7.255}$$

$$R=\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\tag{7.256}$$

这里$\left(\dfrac{\partial\sigma'}{\partial\sigma}\right)$是变换矩阵，$R$ 是变换的余函数，若变换不显含 t，则 $R=0$。

对于隐形式，有

$$\sigma'=\sigma-\sigma_s(X',x,t;\varepsilon)\tag{7.257}$$

引进算符 D：

$$D=\frac{\partial}{\partial(X',x)}\tag{7.258}$$

它表示对向量$\begin{pmatrix}X'\\x\end{pmatrix}$求偏导数。于是有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\sigma'}{\partial\sigma}\right)&=E-\frac{\partial}{\partial\sigma}\sum_m\sigma_s^{(m)}\\&=E+D\sum_m\sigma_s^{(m)}\sum_{k\geqslant1}(-1)^k\Big(D\sum_m X_s^{(m)}\Big)^{k-1}\end{aligned}\tag{7.259}$$

该式右端 E 为 $2n$ 阶单位矩阵，其余各项亦应为 $2n$ 阶方阵或 $2n$ 阶列向量；凡元素不足 $2n$ 个的，均分别用零元素补充到 $2n$ 个，不过各元素的排列次序同前，下面也将有类似情况，不再说

明。$(D\sum_m X_s^{(m)})^{k-1}$表示矩阵乘幂，当 $k=1$ 时，该项为 $2n$ 阶单位矩阵。与变换矩阵$(\frac{\partial\sigma'}{\partial\sigma})$的表示方法类似，变换余函数 R 有如下形式：

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial t}=-\sum_m(\frac{\partial\sigma_s^{(m)}}{\partial t})$$

$$+[\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\frac{\partial}{\partial X'}\sum_m\sigma_s^{(m)}(\frac{\partial}{\partial X'}\sum_m X_s^{(m)})^k]\sum_m(\frac{\partial X_s^{(m)}}{\partial t}) \tag{7.260}$$

相应的方程(7.255)的右函数 f 亦应表示成混合变量的形式，即

$$f(\sigma,t;\varepsilon)=f(X',x,t;\varepsilon)+\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial X'^k}(\sum_m X_s^{(m)})^k \tag{7.261}$$

对于显形式，有

$$\sigma'=\sigma-\sigma_s(\sigma',t;\varepsilon) \tag{7.262}$$

引进算符 D'：

$$D'=\frac{\partial}{\partial\sigma'} \tag{7.263}$$

它表示对向量$\begin{pmatrix}X'\\x'\end{pmatrix}$求偏导数。相应的$(\frac{\partial\sigma'}{\partial\sigma})$，$R$ 和 f 分别由下列各式表达：

$$(\frac{\partial\sigma'}{\partial\sigma})=E+\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k(D'\sum_m\sigma_s^{(m)})^k \tag{7.264}$$

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial t}=-[\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k(D'\sum_m\sigma_s^{(m)})^k]\sum_m(\frac{\partial\sigma_s^{(m)}}{\partial t}) \tag{7.265}$$

$$f(\sigma,t;\varepsilon)=f(\sigma',t;\varepsilon)+\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial\sigma'^k}(\sum_m\sigma_s^{(m)})^k \tag{7.266}$$

将(7.259)～(7.261)式代入方程(7.255)，即得隐形式变换后新变量 σ' 所满足的运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}t}=f^*(X',x,t;\varepsilon)=\sum_{k\geqslant 0}f_k^*(X',x,t;\varepsilon) \tag{7.267}$$

其中

$$f_0^*=f_0(X') \tag{7.268}$$

$$f_1^*=f_1(X',x,t;\varepsilon)+\frac{\partial f_0}{\partial X'}X_s^{(1)}-(D\sigma_s^{(1)})f_0-(\frac{\partial\sigma_s^{(1)}}{\partial t}) \tag{7.269}$$

$$f_2^*=f_2(X',x,t;\varepsilon)+\frac{\partial f_1}{\partial X'}X_s^{(1)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial X'^2}X_s^{(1)^2}+\frac{\partial f_0}{\partial X'}X_s^{(2)}$$

$$+(-D\sigma_s^{(2)}+D\sigma_s^{(1)}DX_s^{(1)})f_0-D\sigma_s^{(1)}(f_1+\frac{\partial f_0}{\partial X'}X_s^{(1)})$$

$$-(\frac{\partial\sigma_s^{(2)}}{\partial t})+\frac{\partial\sigma_s^{(1)}}{\partial X'}(\frac{\partial X_s^{(1)}}{\partial t}) \tag{7.270}$$

……

将(7.264)～(7.266)式代入方程(7.255)，即得显形式变换后新变量 σ' 所满足的运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}t}=f^*(\sigma',t;\varepsilon)=\sum_{k\geqslant 0}f_k^*(\sigma',t;\varepsilon) \tag{7.271}$$

其中

$$f_0^*=f_0(X') \tag{7.272}$$

$$f_1^* = f_1(\sigma', t; \varepsilon) + \frac{\partial f_0}{\partial X'} X_s^{(1)} - (D'\sigma_s^{(1)}) f_0 - (\frac{\partial \sigma_s^{(1)}}{\partial t}) \tag{7.273}$$

$$f_2^* = f_2(\sigma', t; \varepsilon) + (D' f_1)\sigma_s^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial X'^2} X_s^{(1)^2} + \frac{\partial f_0}{\partial X'} X_s^{(2)}$$
$$+ (-D'\sigma_s^{(2)} + D'\sigma_s^{(1)} D'\sigma_s^{(1)}) f_0 - D'\sigma_s^{(1)} (f_1 + \frac{\partial f_0}{\partial X'} X_s^{(1)})$$
$$- (\frac{\partial \sigma_s^{(2)}}{\partial t}) + D\sigma_s^{(1)} (\frac{\partial \sigma_s^{(1)}}{\partial t}) \tag{7.274}$$

……

两种变换的目的都是为了简化原方程(7.249)，即在一定精度前提下，使变换后的右函数 f^* 分别为

$$f^* = \sum_{k=0}^{l} f_k^* (X'; \varepsilon^k) + \sum_{k \geq l+1} f_k^* (X', x, t; \varepsilon^k) \tag{7.275}$$

和

$$f^* = \sum_{k=0}^{l} f_k^* (X'; \varepsilon^k) + \sum_{k \geq l+1} f_k^* (\sigma', t; \varepsilon^k) \tag{7.276}$$

其中

$$f_k^* (X'; \varepsilon^k) = \begin{pmatrix} (f_k^*)_{X'} \\ (f_k^*)_{x'} \end{pmatrix} \tag{7.277}$$

$$(f_k^*)_{x'} = \begin{pmatrix} (f_k^*)_{\Omega'} \\ (f_k^*)_{\omega'} \\ (f_k^*)_{M'} \end{pmatrix} \tag{7.278}$$

这里 $(f_k^*)_{x'}$ 表示 x' 方程的右函数。关于 X' 方程对应的右函数部分 $(f_k^*)_{X'}$ 有两种情况，对于保守系统，它是零向量，即

$$(f_k^*)_{X'} = \begin{pmatrix} (f_k^*)_a' \\ (f_k^*)_e' \\ (f_k^*)_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots, l) \tag{7.279}$$

对于非保守系统，$(f_k^*)_{X'}$ 为非零向量。因此，对于保守系统，在 $O(\varepsilon^l)$ 精度意义下，变换后的方程成为可积形式，其解为

$$\left. \begin{aligned} X' &= X'_0 \\ x' &= x'_0 + (\sum_{k=0}^{l} f_k^* (X'_0; \varepsilon^k))_{x'} (t - t_0) \end{aligned} \right\} \tag{7.280}$$

对于非保守系统，尽管不像保守系统这么简单，但变换后的方程仍达到了简化的目的，因周期项已全部分离出，问题显然变得比较简单。

上述由(7.275)和(7.276)式表达的 f^* 如何得到？这就是方法的关键。与 Zeipel 方法、Hori-Deprit 方法完全类似，利用 $\sigma_s^{(m)}$ 的待定性，与 f^* 在 $O(\varepsilon^l)$ 意义下满足所要求形式的同时来确定其具体表达式。事实上这是一变换序列（有限项），那么，在何种条件下能构成这样的变换序列呢？与前面正则变换方法的要求相同，即原方程的右函数展开式(7.250)不含一阶长周期部分，亦即

$$f_{1l} = 0 \tag{7.281}$$

关于变换过程中出现通约项的问题，其处理方法与正则变换方法中的处理相同，亦可采用

类似于拟平均根数法的处理方式，将通约项保留在变换后的右函数 f^* 中。凡是正则变换方法中所具有的用来简化动力系统的"功能"，在非正则形式的变换方法(即这里介绍的一般变换方法)中都可引用。因此，这一变换方法的原理并不复杂，如果读者仔细阅读过前几节，那么对此方法的构思是不难理解的。

2. 摄动解的构造过程

这里仍以一个简单的受摄二体问题——仅考虑中心天体扁率(J_2 项)摄动的受摄系统为例，介绍上述一般变换方法建立相应摄动解的过程，这样既能简洁明了地阐明构造摄动解的具体细节，又可与第三章的平均根数法作一一对应的比较。

对于 J_2 项摄动，仍用 a,e,i,Ω,ω,M 作为基本变量，记作 σ，它的记法即(7.247)～(7.248)，相应的摄动运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f_0(X_1)+f_1(X_1,X_2,X_3,x_2,x_3;J_2) \tag{7.282}$$

这里，小参数 $\varepsilon=J_2$。该系统是一定常系统，而右函数又不含 $x_1=\Omega$，$f_k=0(k\geqslant 2)$。右函数 f_0 和 f_1 可以写成下列形式：

$$f_0=\delta n,\quad \delta=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \tag{7.283}$$

$$f_1=f_{1c}(X;J_2)+f_{1s}(X,x;J_2) \tag{7.284}$$

同样采用第三章 3.3 中的计算单位，使引力常数 $\mu=1$，那么

$$n=a^{-3/2} \tag{7.285}$$

而向量函数 f_{1c} 和 f_{1s} 的 6 个元素分别由第三章的公式(3.51)～(3.56)和(3.57)～(3.62)表达，这里不再重复写出。但其中由(3.62)式表达的"右函数"$(f_{1s})_M$ 的 $\left(-\frac{\partial n}{\partial a}\right)a_s^{(1)}$ 这一项应删去。下面采用隐形式的变换方法来建立相应的摄动解，而且为了表明方法的具体过程，讨论一阶解的建立已足够，即只要给出一阶周期项和一、二阶长期项。

第一次消除快变量 x_3(即 M)。新变量记作 σ'：

$$\sigma'=\begin{pmatrix}X'\\x'\end{pmatrix},\qquad X'=\begin{pmatrix}a'\\e'\\i'\end{pmatrix},\qquad x'=\begin{pmatrix}\Omega'\\\omega'\\M'\end{pmatrix} \tag{7.286}$$

相应的变换(7.251)可写成

$$\sigma=\sigma'+\sum_{m\geqslant 1}\sigma_s^{(m)}(a',e',i',\omega,M;J_2^m) \tag{7.287}$$

变换后新变量的方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}t}=f_0^*+f_1^*+f_2^*+\cdots \tag{7.288}$$

根据(7.268)～(7.270)式有

$$f_0^*=f_0(a')=\delta n' \tag{7.289}$$

$$f_1^* = f_{1c}(a',e',i';J_2) + f_{1s}(a',e',i',\omega,M;J_2)$$

$$+\delta \frac{\partial n}{\partial a'} a_s^{(1)} - n' \frac{\partial \sigma_s^{(1)}}{\partial M} \tag{7.290}$$

$$f_2^* = (\frac{\partial f_1}{\partial X'} X_s^{(1)} - \frac{\partial \sigma_s^{(1)}}{\partial x} f_1) - \frac{1}{n'} \frac{\partial n}{\partial a'} a_s^{(1)} f_1 + \delta [\frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial a'^2} - \frac{1}{n'} (\frac{\partial n}{\partial a'})^2] a_s^{(1)^2}$$

$$+\delta \frac{\partial n}{\partial a'} a_s^{(2)} - n' \frac{\partial \sigma_s^{(2)}}{\partial M} \tag{7.291}$$

……

为了消除快变量 M,可由(7.290)和(7.291)式给出

$$f_1^* = f_{1c}(a',e',i';J_2) \tag{7.292}$$

$$n' \frac{\partial \sigma_s^{(1)}}{\partial M} = f_{1s}(a',e',i',\omega,M;J_2) + \delta \frac{\partial n}{\partial a'} a_s^{(1)} \tag{7.293}$$

$$f_2^* = (\Phi_2)_{c,l} = f_{2c}^*(a',e',i';J_2^2) + f_{2l}^*(a',e',i',\omega;J_2^2) \tag{7.294}$$

$$n' \frac{\partial \sigma_s^{(2)}}{\partial M} = (\Phi_2)_s + \delta \frac{\partial n}{\partial a'} a_s^{(2)} \tag{7.295}$$

其中

$$\Phi_2 = [(\frac{\partial f_1}{\partial a'} + \frac{3}{2a'} f_{1s}) a_s^{(1)} + \frac{\partial f_1}{\partial e'} e_s^{(1)} + \frac{\partial f_1}{\partial i'} i_s^{(1)}]$$

$$-[\frac{\partial \sigma_s^{(1)}}{\partial \omega} (f_1)_\omega + \frac{\partial \sigma_s^{(1)}}{\partial M} (f_1)_M] + \delta(-\frac{3}{8} a'^{-7/2}) a_s^{(1)^2} \tag{7.296}$$

对于一阶解,上述变换已完成,且因隐形式变换导致表达式中出现的 ω, M 均可直接改为 ω', M',于是有

$$\frac{d\sigma'}{dt} = f_0^*(a') + f_1^*(a',e',i';J_2) + f_2^*(a',e',i',\omega';J_2^2) \tag{7.297}$$

第二次消除慢变量 x'_2(即 ω')。新变量记作 σ'',即

$$\sigma'' = \begin{pmatrix} X'' \\ x'' \end{pmatrix}, \qquad X'' = \begin{pmatrix} a'' \\ e'' \\ i'' \end{pmatrix}, \qquad x'' = \begin{pmatrix} \Omega'' \\ \omega'' \\ M'' \end{pmatrix} \tag{7.298}$$

相应的变换为

$$\sigma' = \sigma'' + \sum_{m \geq 1} \sigma_l^{(m)}(a'',e'',i'',\omega';J_2^m) \tag{7.299}$$

变换后新变量满足的方程是

$$\frac{d\sigma''}{dt} = f_0^{**} + f_1^{**} + f_2^{**} + \cdots \tag{7.300}$$

其中

$$f_0^{**} = f_0^*(a'') = \delta n'' \tag{7.301}$$

$$f_1^{**} = f_1^*(a'',e'',i'') \tag{7.302}$$

$$f_2^{**} = f_{2c}^*(a'',e'',i'') \tag{7.303}$$

而 $\sigma_l^{(1)}$ 由下式确定:

$$(f_1^*)_\omega \frac{\partial \sigma_l^{(1)}}{\partial \omega'} = f_{2l}^*(a'',e'',i'',\omega';J_2^2) + \frac{\partial f_1^*}{\partial X''} X_l^{(1)} + \delta \frac{\partial n}{\partial a''} a_l^{(2)} \tag{7.304}$$

到此,有如下结果

$$(f^{**})_{X''} = 0 \tag{7.305}$$

两次变换完成。相应的摄动解为

$$\left.\begin{array}{l} X'' = X''_0 \\ x'' = x''_0 + \left(\sum_{k=0}^{2} f_k^{**}(X''_0; J_2^k)\right)(t - t_0) \end{array}\right\} \tag{7.306}$$

原变量的解为

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma'(t) + \sigma_s^{(1)}(t) \\ &= \sigma''(t) + \sigma_l^{(1)}(t) + \sigma_s^{(1)}(t) \end{aligned} \tag{7.307}$$

其中 $\sigma_s^{(1)}(t)$ 和 $\sigma_l^{(1)}(t)$ 分别由两个简单的一阶偏微分方程(7.293)和(7.304)给出，即

$$\sigma_s^{(1)}(t) = \frac{1}{n'}\int^{M}\left[f_{1s} + \delta\frac{\partial n}{\partial a'}a_s^{(1)}\right]\mathrm{d}M \tag{7.308}$$

$$\sigma_l^{(1)}(t) = \frac{1}{(f_1^*)_{\omega}}\int^{\omega'}\left[f_{2l}^* + \frac{\partial f_1^*}{\partial X''}X_l^{(1)} + \delta\frac{\partial n}{\partial a''}a_l^{(2)}\right]\mathrm{d}\omega' \tag{7.309}$$

这里 $(f_1^*)_{\omega}$ 是 ω 的一阶长期项系数，即第三章中平均根数法给出的 ω_1。

如果将 f_{1c} 和 f_{1s} 的表达式代入上列各有关公式，即可给出 J_2 项摄动解的具体结果。不难看出，推导 $\sigma_s^{(1)}(t)$，$\sigma_l^{(1)}(t)$ 以及长期项系数的过程与第三章 3.3 中用平均根数法推导相应解的过程几乎相同，唯有(7.296)式中的 $\left(-\frac{\partial \sigma_s^{(1)}}{\partial x}f_1\right)$ 代替了平均根数法中的 $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}x_s^{(1)}\right)$。但有一个极其重要的差别，即求 $\sigma_s^{(m)}(t)$ 和 $\sigma_l^{(m)}(t)$ 时，由原平均根数法中对 t 的积分变为一个由一阶偏微分方程导致的对 M 的积分，它可严格地按无摄运动的关系进行积分运算，从而避免了平均根数法中所遇到的困难，即这里的变换方法在要求准到二阶周期项时，无须将有关的被积函数展成 M 的三角级数，从而使摄动解对 e 是封闭的，它适用于 $0<e<1$，这是一个非常明显的优点。我们不妨把此变换方法看成是数学化的平均根数法。

若用显形式的变换方法，其过程与上类似，至于对非定常系统或耗散系统的处理，不再讨论，可参阅本章参考文献[3]和[18]～[20]。

参考文献

[1] Siegel, C. L., Moser, J. K., *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971.

[2] Garfinkel, B., *Astron. J.*, 71(1966), 657～669.

[3] 刘林,《人造地球卫星轨道力学》,高等教育出版社,1992 年。

[4] Hori, G., *Publ. Astron.* Soc. Japan, 18(1966), 287～296.

[5] Deprit, A., *Celest. Mech.*, 1(1969), 12～30.

[6] Gröbner, W., *Die Lie-Reihen und Ihre Anwendungen*, Springer-Verlag(1960).

[7] Howland, R. A., *Celest. Mech.*, 19(1979), 139～145.
[8] 刘林,天文学报,23(1982),255～263。*CAA*,7(1983),113～119。
[9] 刘林、赵德滋,天文学报,20(1979),349～359。*CAA*,4(1980),343～353。
[10] 刘林、赵德滋,南京大学学报(自然科学版),14(1978),1～22。
[11] Kamel, A. A., *Celest. Mech.*, 3(1970), 90～106.
[12] 刘林、章圣泮,南京大学学报(自然科学版),18(1982),359～370。
[13] 刘林、章圣泮,中国科学(A辑),1983, No. 5, 455～465。
[14] Liu Lin, Zhang Shen-pan, *SCIENTIA SINICA*, 26(1983), 861～873.

第八章　天体运动方程的数值解法

从前面几章已清楚地看出，描述天体运动的微分方程相当复杂，除二体问题等少数几种情况外，都不可能给出严格解，即使在一定条件下(或某种近似)给出相应的小参数幂级数解，但要满足高精度要求，就涉及到幂级数解的高阶项，其项数之多，不仅难以推导，即使具体推出亦难以采用，甚至有的摄动因素无法用简单的分析表达式写出，人造卫星精密定轨问题中就会遇到这种情况，况且，对于某些问题，只需要知道解在若干点上的值。因此，给出相应微分方程满足一定精度的离散解即行，这就使得解微分方程(这里是指常微分方程，以下从略)的数值方法，在天体力学方法中占有十分重要的地位，特别在当今计算机技术高度发展的时代，更显得它的优越性。当然，这并不是说它可以代替分析方法和定性方法，因为对天体运动的研究，更重要的是要给出运动规律，数值方法不能解决这一问题。不过它可以提供一些有益的"信息"，在定性研究中也是不可缺少的方法。

8.1　有关数值解法的基本知识

1. 数值解法的基本思想

对于一个微分方程的初值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t)\\&x(a)=x_0\\&a\leqslant t\leqslant b\end{aligned}\right\}\tag{8.1}$$

x 可以看成向量(如坐标 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$)，求该问题的数值解就是设法在区间$[a,b]$上的一系列离散点 $t_n(n=1,2,\cdots,m)$处，计算出解 $x(t)$的近似值 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 这里

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=b\tag{8.2}$$

如无特殊要求，通常是将 t_n 取成等间隔的，即

$$t_n=t_0+nh,\quad n=1,2,\cdots,m\tag{8.3}$$

其中 $t_0=a$，h 称为步长。由初值 $x_0=x(t_0)=x(a)$求出 x_1，再由 x_1 求出 x_2，依次求出 x_m，得到 m 个离散点上的 x_n 值，此即用一种离散化方法来处理连续性问题(8.1)。

当然，要由 x_n 求出 x_{n+1}，一个最直接的方法是利用泰勒(Taylor)展式，即

$$x_{n-1} \approx x_n + h\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_n} + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t_n} + \cdots + \frac{h^p}{p!}\left(\frac{\mathrm{d}^px}{\mathrm{d}t^p}\right)_{t_n} \tag{8.4}$$

其中 p 为一正整数。通过方程(8.1)可以逐步把各阶导数求出，有

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_n} = f(x_n, t_n) \\ &\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_n} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

这显然也是一种离散化方法，但必须计算高阶导数，当方程(8.1)的右函数 $f(x,t)$ 比较复杂时，计算高阶导数就变得相当麻烦，而天体运动方程的右函数往往就属于这种情况。因此，在一般情况下，泰勒多项式不宜直接引用，各种数值解法几乎都是采用若干个右函数值来代替高阶导数值，使计算得以简化，这就是微分方程数值解法的基本思想。

2. 一些基本概念

将泰勒展式从 $p=2$ 截断，即取多项式(8.4)中的 $p=1$，得欧拉(Euler)公式：

$$\left.\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) \\ &x_0 = x(t_0) \\ &n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

下面借用这一离散化的差分方程来介绍数值方法的一些基本概念。

从欧拉公式可以看出，每前进一步，计算相应步点 t_{n+1} 上的 x_{n+1} 值时，只要知道前一步点 t_n 上的 x_n 值，这种方法称为单步法。若每前进一步时，需要知道前面多个步点上的 x 值，这样的数值方法称为多步法。

从另一个角度来看，欧拉公式每前进一步计算 x_{n+1} 时，只需知道前一步的 x_n 值，这样的公式称为显式公式。如果改为后退的欧拉公式：

$$\left.\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1}, t_{n+1}) \\ &x_0 = x(t_0) \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

则所要计算的 x_{n+1} 包含在右函数 f 中，此公式为隐式公式。对于隐式，往往要采用迭代求解办法，而且还要提供 x_{n+1} 的初值 $x_{n+1}^{(0)}$。

既然数值方法给出的是解 $x(t)$ 在离散步点 t_n 上的近似值 x_n，因此就有一个误差问题，除初值误差外，还有截断误差和舍入误差。关于截断误差，仍用欧拉公式(7.6)来说明，相应的精确解 $x(t_{n+1})$ 应满足带余项的泰勒展式：

$$x(t_{n-1}) = x(t_n) + h\dot{x}(t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_n) \tag{8.8}$$

其中 ξ_n 为区间 (t_n, t_{n-1}) 中的某一点，因为

$$\dot{x}(t_n) = f(x(t_n), t)$$

上式可改写为

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(x(t_n), t) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_n) \tag{8.9}$$

由此可见，欧拉公式(8.6)就是用精确解满足的表达式(8.9)截去其中的$\frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_n)$所得到的近似公式。而$\frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_n)$就称为欧拉方法的局部截断误差(简称截断误差)，或称局部离散误差，它与h^2同阶，记为$O(h^2)$。当然，其实际大小还取决于导数$\ddot{x}(t_n)$的值，这涉及到解$x(t)$的性质。由于丢掉的是二阶导数，就称欧拉方法为一阶方法，后面将会看到，对于一些常用的单步法，方法的阶数正好比方法的截断误差中h的幂次低1，即若截断误差为$O(h^{p+1})$，则方法为p阶的。因此，方法的阶数可作为衡量方法精度的一个重要标志。

关于舍入误差，它的产生涉及到多种因素，大致有这几个方面：计算数据字长不可能无限，使用任何计算工具都是如此；具有有限字长的数与数之间的运算；在计算机上计算右函数$f(x,t)$所使用的程序的精度等。由此可见，舍入误差的情况比截断误差复杂，但还是可以设法估计它的界，例如把舍入误差当作随机量，采用统计方法可得到较好的结果。

在讨论截断误差时，不免要提出这样的问题，即当$h\to 0$时，是否有$x_n\to x(t_n)$，这里$x(t_n)$和x_n各表示方程(8.1)的精确解和步点t_n上的数值解(近似解)，这就是数值方法的收敛性问题。另一个问题是稳定性问题，不论是单步法或是多步法，某一步产生的误差(包括初值误差和舍入误差)都会传播下去，误差将会累积(即全局误差的累积)，只有当误差的累积受到控制，相应的数值方法才是稳定的，否则称之为不稳定的。数值稳定性问题与数值方法的阶数以及步长都有关系，一个数值方法是否实用，稳定性是至关重要的。

关于稳定性，有多种提法。对于有限的固定步长h，在计算过程中某一步产生的误差，对以后的计算结果的影响不会步步增长，这种稳定性概念，就是通常所说的绝对稳定性。如果这种稳定性具有有限的稳定区边界，则称之为条件稳定的，否则就是无条件稳定的。对于多步法，无条件稳定性，亦称A-稳定性。这些稳定性的提法都是针对数值方法本身的，而所讨论的微分方程(对应一种“运动”)应是稳定的。但天体运动方程却不然，就连最简单的开普勒运动也是运动不稳定的，任何一个稳定的数值方法，也无法控制其沿迹(即沿运动方向)误差的步步增长；如果一个数值方法不会使这沿迹误差的增长更加恶化，有时也称该方法为相对稳定的。在动力天文中，对于长弧定轨问题，一个数值方法能否控制运动沿迹误差的增长速度是至关重要的，这将在后面的几节和下一章中具体论述。

关于收敛性、稳定性以及误差估计问题，是数值方法中的几个重要的理论课题，读者如需要进一步深入了解，可阅读本章参考文献[1]和[2]。下面介绍一些常用的数值方法及其有关问题。

8.2 常用的单步法——Runge-Kutta 方法

一种常用的单步法就是众所周知的 Runge Kutta 方法(以下简称 RK 方法)，其基本思想就是间接引用泰勒展式，即用积分区间$[t_n,t_{n+1}]$上若干个点的右函数值f的线性组合来代替f的导数，然后用泰勒展式确定相应的系数，这样既能避免计算f的各阶导数，又能保证精度。

以常用的四阶 RK 方法为例，令

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{4} c_i k_i \tag{8.10}$$

其中 c_i 为待定的权因子，k_i 满足下列方程：

$$\left.\begin{aligned} &k_i = hf(t_n + \alpha_i h, x_n + \sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j) \\ &\alpha_1 = 0, \beta_{1j} = 0, i = 1,2,3,4 \end{aligned}\right\} \quad (8.11)$$

即

$$\left.\begin{aligned} &k_1 = hf(t_n, x_n) \\ &k_2 = hf(t_n + \alpha_2 h, x_n + \beta_{21}k_1) \\ &k_3 = hf(t_n + \alpha_3 h, x_n + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2) \\ &k_4 = hf(t_n + \alpha_4 h, x_n + \beta_{41}k_1 + \beta_{42}k_2 + \beta_{43}k_3) \end{aligned}\right\} \quad (8.12)$$

系数 α_i, β_{ij} 的确定方法如下：将 k_i 右端的 f 在点 (t_n, x_n) 处展开，有

$$k_1 = hf_n$$

$$k_2 = hf_n + h^2(\alpha_2 f'_{t_n} + \beta_{21} f'_{x_n} f_n) + \cdots$$

……

以此代入(8.10)式并与 $x(t_n+h)$ 在点 t_n 处的泰勒展式

$$x(t_n+h) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)) + \frac{h^2}{2}(f'_{t_n} + f'_{x_n} f_n) + \cdots$$

逐项进行比较，令 h, h^2, h^3, h^4 项的系数相等，便得到确定 c_i 和 β_{ij} 的关系式，即

$$c_1 + c_2 = 1 \quad , \quad c_2\alpha_2 = 1/2 \quad , \quad c_2\beta_{21} = 1/2, \cdots \quad (8.13)$$

显然，上述参数 $c_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ 的选择不是唯一的，有自由参数，它的不同选择就确定了不同的 RK 公式。

上述 RK 公式(8.10)～(8.11)是显式的，如果改写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{m} c_i k_i \\ &k_i = hf(t_n + \alpha_i h, x_n + \sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}k_j) \end{aligned}\right\} \quad (8.14)$$

这种 RK 公式是隐式的。而

$$k_i = hf(t_n + \alpha_i h, x_n + \sum_{j=1}^{i}\beta_{ij}k_j), \quad i = 1,2,\cdots,m \quad (8.15)$$

则是对角隐的 RK 公式。在动力天文中，通常是采用显式 RK 公式。

不难看出，对于四阶 RK 公式，其阶数与每前进一步所需计算的函数值 f 的次数是一致的。但更高阶的 RK 公式所需计算的 f 值的次数要比阶数多。若用 $N(m)$ 表示只需计算 m 次 f 值所获得的方法的最高阶数，则有

$$N(m) = m, \quad 1 \leqslant m \leqslant 4 \quad (8.16)$$

而

$$N(5) = 4, \quad N(6) = 5, \quad N(7) = 6, \quad N(8) = 6, \quad N(9) = 7, \cdots \quad (8.17)$$

下面具体给出几种常用的显式 RK 公式。

1. 四阶公式

(1)古典形式

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{6}[k_1+2k_2+2k_3+k_4] \tag{8.18}$$

$$\left.\begin{aligned}
k_1&=hf(t_n,x_n)\\
k_2&=hf(t_n+\frac{1}{2}h,x_n+\frac{1}{2}k_1)\\
k_3&=hf(t_n+\frac{1}{2}h,x_n+\frac{1}{2}k_2)\\
k_4&=hf(t_n+h,x_n+k_3)
\end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

(2)Gill 公式(它有减小舍入误差的优点)

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{6}[k_1+(2-\sqrt{2})k_2+(2+\sqrt{2})k_3+k_4] \tag{8.20}$$

$$\left.\begin{aligned}
k_1&=hf(t_n,x_n)\\
k_2&=hf(t_n+\frac{1}{2}h,x_n+\frac{1}{2}k_1)\\
k_3&=hf(t_n+\frac{1}{2}h,x_n+\frac{\sqrt{2}-1}{2}k_1+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})k_2)\\
k_4&=hf(t_n+h,x_n-\frac{\sqrt{2}}{2}k_2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2})k_3)
\end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

四阶 RK 方法是应用较广的一种单步法,对于天体力学(包括自然天体和人造天体的运动)中的某些精度要求不太高而右函数又较简单的问题,也是适用的。

2. RKF 公式

RK 方法本身估计局部截断误差比较麻烦,为此,Fehlberg 提出了一种使用嵌套技术的 RK 方法[3],利用参数 c_i,α_i,β_{ij} 可有不同选择的特点,用时给出 m 阶和 $m+1$ 阶的两组 RK 公式,用两组公式算出的 x_{n+1} 之差可给出局部截断误差,由此可确定下一步的步长,这就起了自动选择步长的作用,此方法称为 Runge-Kutta-Fehlberg 方法,简称 RKF 方法。由于利用了自由选择参数的特点,实现了两组公式的嵌套,m 阶公式与 $m+1$ 阶公式相差甚少,见后面的公式(8.22)～(8.30),只不过多算很少几次右函数值,即可给出局部截断误差。正由于 RKF 方法具备这种优点,因此它已成为目前被广泛采用的单步法。

本章参考文献[3]中给出了 5(6 阶),6(7)阶,7(8)阶和 8(9)阶四个嵌套公式,相应地记为 RKF5(6),RKF6(7),RKF7(8)和 RKF8(9)。至于更高阶的嵌套,已不再能提高效率。下面分别给出 RKF5(6),RKF6(7)和 RKF7(8)三套公式,以便读者直接引用。

(1)RKF5(6)公式

$$\left.\begin{aligned}
x_{n+1}&=x_n+h\sum_{i=0}^{5}c_if_i+O(h^6)\\
\hat{x}_{n+1}&=x_n+h\sum_{i=0}^{7}\hat{c}_if_i+O(h^7)
\end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

$$\left.\begin{aligned}
f_0&=f(t_n,x_n)\\
f_i&=f(t_n+\alpha_ih,x_n+h\sum_{j=0}^{i-1}\beta_{ij}f_j)\quad,\quad i=1,2,\cdots,7
\end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

第 $n+1$ 步的局部截断误差为

$$\mathrm{TE}=\frac{5}{66}(f_0-f_5-f_6-f_7)h \tag{8.24}$$

系数 α_i,β_{ij},c_i 和 $\hat{c}_i$ 列入表 1 中。

表 1　RKF5(6)

i \ j	α	β_{ij} 0	1	2	3	4	5	6	c_i	$\hat{c}_i$
0	0	0							$\frac{31}{384}$	$\frac{7}{1408}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$							0	
2	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{16}{75}$						$\frac{1125}{2816}$	
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{5}$					$\frac{9}{32}$	
4	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{144}{25}$	-4	$\frac{16}{25}$				$\frac{125}{768}$	
5	1	$\frac{361}{320}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{407}{128}$	$-\frac{11}{80}$	$\frac{55}{128}$			$\frac{5}{66}$	0
6	0	$-\frac{11}{640}$	0	$\frac{11}{256}$	$\frac{11}{160}$	$\frac{11}{256}$	0			$\frac{5}{66}$
7	1	$\frac{93}{640}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{803}{256}$	$-\frac{11}{160}$	$\frac{99}{256}$	0	1		$\frac{5}{66}$

由公式(8.22)不难看出，对于五阶公式而言，只多算 2 次右函数(f_6 和 f_7)。

(2)RKF6(7)公式

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\sum_{i=0}^{7} c_i f_i + O(h^7) \\ \hat{x}_{n+1} &= x_n + h\sum_{i=0}^{9} \hat{c}_i f_i + O(h^8) \end{aligned}\right\} \tag{8.25}$$

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= f(t_n, x_n) \\ f_i &= f(t_n+\alpha_i h, x_n + h\sum_{j=0}^{i-1}\beta_{ij} f_j) \quad , \quad i=1,2,\cdots,9 \end{aligned}\right\} \tag{8.26}$$

截断误差为

$$\mathrm{TE}=\frac{11}{270}(f_0+f_7-f_8-f_9)h \tag{8.27}$$

相应的系数列入表 2 中。

表 2　RKF6(7)

i \ j	α_i	β_{ij} 0	1	2	3	4	5	6	7	8	c_i	$\hat{c}_i$
0	0	0									$\frac{77}{1440}$	$\frac{11}{864}$
1	$\frac{2}{33}$	$\frac{2}{33}$									0	
2	$\frac{4}{33}$	0	$\frac{4}{33}$								0	
3	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{22}$	0	$\frac{3}{22}$							$\frac{1771561}{6289920}$	
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{43}{64}$	0	$-\frac{165}{64}$	$\frac{77}{32}$						$\frac{32}{105}$	
5	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2383}{486}$	0	$\frac{1067}{54}$	$-\frac{26312}{1701}$	$\frac{2176}{1701}$					$\frac{243}{2560}$	
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{10077}{4802}$	0	$-\frac{5643}{686}$	$-\frac{116259}{16807}$	$-\frac{6240}{16807}$	$\frac{1053}{2401}$				$\frac{16807}{74880}$	
7	1	$-\frac{733}{176}$	0	$\frac{141}{8}$	$-\frac{335763}{23296}$	$\frac{216}{77}$	$-\frac{4617}{2816}$	$\frac{7203}{9152}$			$\frac{11}{270}$	0
8	0	$\frac{15}{352}$	0	0	$-\frac{5445}{46592}$	$\frac{18}{77}$	$-\frac{1215}{5632}$	$\frac{1029}{18304}$	0			$\frac{11}{270}$
9	1	$-\frac{1833}{352}$	0	$\frac{141}{8}$	$-\frac{51237}{3584}$	$\frac{18}{7}$	$-\frac{729}{512}$	$\frac{1029}{1408}$	0	1		$\frac{11}{270}$

(3)RKF7(8)公式

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\sum_{i=0}^{10} c_i f_i + O(h^8) \\ \hat{x}_{n+1} &= x_n + h\sum_{i=0}^{12} \hat{c}_i f_i + O(h^9) \end{aligned}\right\} \tag{8.28}$$

$$\left.\begin{aligned} & f_0 = f(t_n, x_n) \\ & f_i = f(t_n + \alpha_i h, x_n + h\sum_{j=0}^{i-1}\beta_{ij} f_j) \quad , \quad i = 1,2,\cdots,12 \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

截断误差为

$$\mathrm{TE} = \frac{41}{840}(f_0 + f_{10} - f_{11} - f_{12})h \tag{8.30}$$

各系数列入表 3 中。

在动力天文中常遇到不显含速度项的二阶方程组，1925 年 Nyström 曾给出直接求解这类二阶方程组的 RK 方法，称为 Runge-Kutta-Nyström 算法，但对一般问题并无明显优点，引用不多。因此本章不另作介绍，将在下一章的有关内容中再作介绍。

表 3 RKF7(8)

$i \backslash j$	α_i	β_{ij} 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	c_i	$\hat{c}_i$
0	0	0												$\frac{41}{840}$	0
1	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$												0	
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$											0	
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{8}$										0	
4	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{25}{16}$	$\frac{25}{16}$									0	
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$								$\frac{34}{105}$	
6	$\frac{5}{6}$	$-\frac{25}{108}$	0	0	$\frac{125}{108}$	$-\frac{65}{27}$	$\frac{125}{54}$							$\frac{9}{35}$	
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{300}$	0	0	0	$\frac{61}{225}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{13}{900}$						$\frac{9}{35}$	
8	$\frac{2}{3}$	2	0	0	$-\frac{53}{6}$	$\frac{704}{45}$	$-\frac{107}{9}$	$\frac{67}{90}$	3					$\frac{9}{280}$	
9	$\frac{1}{3}$	$-\frac{91}{108}$	0	0	$\frac{23}{108}$	$-\frac{976}{135}$	$\frac{311}{54}$	$-\frac{19}{60}$	$\frac{17}{6}$	$-\frac{1}{12}$				$\frac{9}{280}$	
10	1	$\frac{2383}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{4496}{1025}$	$-\frac{301}{82}$	$\frac{2133}{4100}$	$\frac{45}{82}$	$\frac{45}{162}$	$\frac{18}{41}$			$\frac{41}{840}$	0
11	0	$\frac{3}{205}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{41}$	$-\frac{3}{205}$	$-\frac{3}{41}$	$\frac{3}{41}$	$\frac{6}{41}$	0			$\frac{41}{840}$
12	1	$-\frac{1777}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{4496}{1025}$	$-\frac{289}{82}$	$\frac{2193}{4100}$	$\frac{51}{82}$	$\frac{33}{164}$	$\frac{12}{41}$	0	1		$\frac{41}{840}$

8.3 线性多步法——Adams 方法、Cowell 方法和 KSG 积分器

对于初值问题(8.1)，线性多步法的一般计算公式为

$$\begin{aligned}&\alpha_k x_{n+k}+\alpha_{k-1}x_{n+k-1}+\cdots+\alpha_0 x_n\\&=h(\beta_k f_{n+k}+\beta_{k-1}f_{n+k-1}+\cdots+\beta_0 f_n)\end{aligned} \tag{8.31}$$

其中 $\alpha_i,\beta_i(i=0,1,2,\cdots,k)$是与 n 无关的常数，$f_i=f(t_i,x_i)$，一般设 $\alpha_k=1$，$|\alpha_0|+|\beta_0|>0$(即 α_0 与 β_0 不同时为零)。上述公式表明：计算 t_{n+k}步点上的 x_{n+k}值时，需要知道它前面的 t_{n+k-1}，t_{n+k-2}，$\cdots$，t_n 各步点上的 x_i 值。因此，称(8.31)式所确定的方法为 k 步法，当 $k=1$ 时即单步法，而 $k>1$ 时则称多步法。又由于公式中出现的 x_i，f_i 都是线性的，故称线性多步法。当 $\beta_k=0$ 时，公式是显式，否则为隐式。

对于 k 步法，其特征多项式：

$$\rho(\xi)=\alpha_k\xi^k+\alpha_{k-1}\xi^{k-1}+\cdots+\alpha_0 \tag{8.32}$$

是很重要的。若方程(8.1)的右函数 $f(t,x)$ 在区域 $a\leqslant t\leqslant b, -\infty<x<\infty$ 中为 t,x 的连续函数，并对 x 满足 Lipschitz 条件，则 k 步公式(8.31)对所有这样的 $f(t,x)$ 为稳定的充分与必要条件是 k 步公式满足特征根条件，即特征多项式(8.32)的零点的模不大于 1，且在单位圆上的零点只能是单零点[1]。用这一条件不仅可以判别一个具体的 k 步法是否稳定，而且也说明了对于一个稳定的 k 步公式，其系数的选择将有所"约束"。或者说，对于给定的多步公式，可以确定它的稳定边界。为此，举一简单的例子来说明。

用 Euler 法解下列方程：

$$\dot{x}=\lambda x, \qquad \lambda=\text{const}$$

相应的 Euler 公式为

$$x_{n+1}-x_n=hf_n=h\lambda x_n$$

其特征多项式

$$\rho(\xi)=\xi-(1+\lambda h)$$

的特征根(即零点)为

$$\mu_1=1+\lambda h$$

要想 Euler 法对于有限的固定步长 h 为绝对稳定，则应有

$$|\mu_1|=|1+\lambda h|\leqslant 1$$

因而使 $|\mu_1|=1$ 的 λh 值就构成绝对稳定区的边界。

下面介绍几种常用的多步法计算公式。

1. Adams 方法 ——显式公式与隐式公式

Adams 显式公式又称为 Adams-Bashforth 公式，隐式公式又称为 Adams-Moulton 公式。

(1)Adams 显式公式

对所给的微分方程(8.1)两端求积分，从 t_n 积分到 t_{n+1}，就得到等价的积分方程：

$$x(t_{n+1})=x(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t,x(t))\mathrm{d}t \tag{8.33}$$

可用插值多项式来代替上式右端的被积函数，从而使其离散化以得到数值公式。这里是采用牛顿后差公式，记

$$\nabla^m f_n=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}f_{n-l} \tag{8.34}$$

∇ 即向后差分算子：

$$\left.\begin{aligned}\nabla f_n&=\nabla f(x_n)=f(x_n)-f(x_n-h)\\ \nabla^2 f_n&=\nabla f(x_n)-\nabla f(x_n-h)\\ &=f(x_n)-2f(x_n-h)+f(x_n-2h)\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

相应的函数 f 的向后插值多项式为

$$p(t)=\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\binom{-s}{m}\nabla^m f_n \tag{8.36}$$

这里是用 k 个插值点。辅助变量 s 由下式定义：

$$s=\frac{t-t_n}{h} \tag{8.37}$$

相应地有

$$s+1=\frac{t-t_n}{h}+1=\frac{t-t_{n-1}}{h},\qquad \cdots,\qquad s+m-1=\frac{t-t_{n-m+1}}{h} \tag{8.38}$$

$\binom{-s}{m}$是广义二项式系数，可表示为

$$\binom{-s}{m}=(-1)^m\binom{s+m-1}{m} \tag{8.39}$$

将插值多项式 $p(t)$代入(8.33)式，得

$$x_{n+1}-x_n=\int_{t_n}^{t_{n+1}}p(t)\mathrm{d}t$$
$$=h\sum_{m=0}^{k-1}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{1}{h}(-1)^m\binom{-s}{m}\mathrm{d}t\right]\nabla^m f_n.$$

此式可写成

$$x_{n+1}=x_n+h\sum_{m=0}^{k-1}\gamma_m\nabla^m f_n \tag{8.40}$$

其中

$$\gamma_m=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{1}{h}(-1)^m\binom{-s}{m}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\binom{s+m-1}{m}\mathrm{d}s \tag{8.41}$$

略去推导过程，直接给出 γ_m 所满足的递推关系如下：

$$\gamma_m+\frac{1}{2}\gamma_{m-1}+\frac{1}{3}\gamma_{m-2}+\cdots+\frac{1}{m+1}\gamma_0=1 \tag{8.42}$$

将差分公式(8.34)代入(8.40)式，可得用右函数值来表示的计算公式，即

$$x_{n+1}-x_n=h\sum_{m=0}^{k-1}\gamma_m\nabla^m f_n$$
$$=h\sum_{m=0}^{k-1}\gamma_m\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}f_{n-l}$$
$$=h\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\sum_{m=0}^{k-1}\gamma_m\binom{m}{l}f_{n-l}$$
$$=h\sum_{l=0}^{k-1}\left[(-1)^l\sum_{m=l}^{k-1}\gamma_m\binom{m}{l}\right]f_{n-l}$$

该公式可简化为

$$x_{n+1}=x_n+h\sum_{l=0}^{k-1}\beta_{kl}f_{n-l},\qquad k=1,2,\cdots \tag{8.43}$$

其中

$$\beta_{kl} = (-1)^l \sum_{m=l}^{k-1} \binom{m}{l} \gamma_m = (-1)^l \left[\binom{l}{l}\gamma_l + \binom{l+1}{l}\gamma_{l+1} + \cdots + \binom{k-1}{l}\gamma_{k-1} \right] \tag{8.44}$$

(8.40)式和(8.44)式分别为用后差分和右函数表达的 Adams k 步显式公式，计算 x_{n+1} 时，只用到前 k 个步点 $t_{n-k+1}, t_{n-k+2}, \cdots, t_n$ 上的 $x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \cdots, x_n$ 值。

(2)Adams 隐式公式

对所给微分方程(8.1)两端从 t_{n-1} 到 t_n 求积分，便得

$$x(t_n) - x(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, x(t))\mathrm{d}t \tag{8.45}$$

与前面相同，仍用 f_n 的后差分表示插值公式，给出

$$x_n - x_{n-1} = h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m^* \nabla^m f_n \tag{8.46}$$

仿照显式公式的推导过程，且下标改用统一形式，即得 Adams 隐式公式如下：

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{kl}^* f_{n+1-l}, \qquad k = 1,2,\cdots \tag{8.47}$$

$$\beta_{kl}^* = (-1)^l \sum_{m=l}^{k-1} \binom{m}{l} \gamma_m^* \tag{8.48}$$

而 γ_m^* 满足下列递推关系：

$$\gamma_m^* + \frac{1}{2}\gamma_{m-1}^* + \frac{1}{3}\gamma_{m-2}^* + \cdots + \frac{1}{m+1}\gamma_0 = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \tag{8.49}$$

$\gamma_0^*, \gamma_1^*, \cdots, \gamma_m^*$ 与 γ_m 之间有如下关系：

$$\sum_{i=0}^{m} \gamma_i^* = \gamma_m, \qquad m = 0,1,2,\cdots \tag{8.50}$$

Adams 隐式公式常与显式公式联合使用，即由 Adams 显式公式提供一个近似值 $x_{n+1}^{(0)}$，此即预估(PE)，再用隐式公式进行校正(CE)，从而得到所需要的 x_{n+1} 值。这一联合使用的方法就称为预估-校正法，简称 PECE 算法。对于受摄二体问题，可针对运动方程的特点，将右函数分解为主要(即中心引力加速度)和次要(即摄动加速度)两个部分，前者是校正的主要“内容”，这种方法又称为部分预估-校正法，简称 PECE* 算法。

系数 γ_m, γ_m^* 和 β_{kl}, β_{kl}^* 的计算，在计算机上是很容易实现的，这里为了某种需要，给出直到 12 阶(步)的系数 γ_m 和 γ_m^* 值($m=0,1,\cdots,11$)，见表 4。

表 4　γ_m 和 γ_m^* 值

m	0	1	2	3	4	5
γ_m	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$
γ_m^*	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$
m	6	7	8	9	10	11
γ_m	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{36799}{120960}$	$\frac{1070017}{3628800}$	$\frac{25713}{89600}$	$\frac{26842253}{95800320}$	$\frac{4777223}{17418240}$
γ_m^*	$-\frac{863}{60480}$	$-\frac{1375}{120960}$	$-\frac{33953}{3628800}$	$-\frac{8183}{1036800}$	$-\frac{3250433}{479001600}$	$\frac{4671}{788480}$

2. Cowell 方法——Stömer 公式和 Cowell 公式

Cowell 方法是 1910 年由 Cowell 和 Grommelin 在预报哈雷彗星回归的工作中提出的[4]，它是求解下列二阶方程初值问题

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= f(x,t) \\ x(t_0) = x_0,\ & \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \end{aligned}\right\} \tag{8.51}$$

的线性多步法。该二阶方程的特点是右函数不含速度 $\dot{x}$，而仅需考虑引力作用的天体运动方程正是如此。所以，Cowell 方法曾是天体力学有关问题常采用的一种数值方法。在每一步计算中，只需要直接给出 x_n 而不必去算 $\dot{x}_n$，这比将二阶方程(8.51)写为一阶方程组后用 Adams 方法求数值解要简便些。

用于初值问题(8.51)的线性多步法计算公式与(8.31)式不同，其一般形式为

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 x_n = h^2(\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \cdots + \beta_0 f_n) \tag{8.52}$$

或写成

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \tag{8.53}$$

通常设 $\alpha_k = 1, |\alpha_0| + |\beta_0| > 0$。

(1)Stömer 显式公式

对问题(7.51)的微分方程求积分，得

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t} f(t, x(t))\mathrm{d}t \tag{8.54}$$

再积分该式两端，分别从 t_n 积到 t_{n+1} 和 t_n 积到 t_{n-1}，有

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\dot{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{t_n}^{t} f(t, x(t))\mathrm{d}t^2$$

$$x(t_{n-1}) = x(t_n) - h\dot{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n-1}}\int_{t_n}^{t} f(t, x(t))\mathrm{d}t^2$$

由这两式即可消去 $\dot{x}(t_n)$，最后得一等价的积分方程，即

$$\begin{aligned} & x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1}) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{t_n}^{t} f(t, x(t))\mathrm{d}t^2 + \int_{t_n}^{t_{n-1}}\int_{t_n}^{t} f(t, x(t))\mathrm{d}t^2 \end{aligned} \tag{8.55}$$

用插值多项式代替被积函数，即可给出离散化后的数值公式。类似 Adams 显式公式的推导过程，可得

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = h^2 \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m \nabla^m f_n \tag{8.56}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m &= (-1)^m \int_0^1 (1-s)\left[\binom{-s}{m} + \binom{s}{m}\right]\mathrm{d}s \\ s &= \frac{t - t_n}{h} \end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

由此积分可给出系数 σ_m 的递推关系式[1]：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_0 &= 1\\ \sigma_m &= 1-\frac{2}{3}h_2\sigma_{m-1}-\frac{2}{4}h_3\sigma_{m-2}-\cdots-\frac{2}{m+2}h_{m+1}\sigma_0\\ &= 1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2}{i+2}h_{i+1}\right)\sigma_{m-i}, \qquad m=1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{8.58}$$

其中 h_i 是调和级数的前 i 项的部分和，即

$$h_i = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i} \tag{8.59}$$

由后差公式(8.34)，可将(8.56)式改写成用右函数表达的形式：

$$\begin{aligned}x_{n+1}-2x_n+x_{n-1} &= h^2\sum_{m=0}^{k-1}\sigma_m\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}f_{n-l}\\ &= h^2\sum_{l=0}^{k-1}\left[(-1)^l\sum_{m=l}^{k-1}\sigma_m\binom{m}{l}\right]f_{n-l}\end{aligned}$$

又可简写为

$$x_{n+1}-2x_n+x_{n-1} = h^2\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_{kl}f_{n-l}, \qquad k=1,2,\cdots \tag{8.60}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_{kl} &= (-1)^l\sum_{m=l}^{k-1}\binom{m}{l}\sigma_m\\ &= (-1)^l\left[\binom{l}{l}\sigma_l+\binom{l+1}{l}\sigma_{l+1}+\cdots+\binom{k-1}{l}\sigma_{k-1}\right]\end{aligned} \tag{8.61}$$

(8.56)式和(8.60)式即 Stömer 显式公式。

(2)Cowell 隐式公式

仿照建立 Adams 隐式公式的方法，容易给出[1]

$$x_n-2x_{n-1}+x_{n-2} = h^2\sum_{m=0}^{k-1}\sigma_m^*\nabla^m f_n \tag{8.62}$$

其中

$$\sigma_m^* = (-1)^m\int_{-1}^{0}(-s)\left[\binom{-s}{m}+\binom{s+2}{m}\right]ds \tag{8.63}$$

s 的意义同前。σ_m^* 有与 σ_m 类似的递推关系：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_0^* &= 1\\ \sigma_0^* &= -\frac{2}{3}h_2\sigma_{m-1}^*-\frac{2}{4}h_3\sigma_{m-2}^*-\cdots-\frac{2}{m+2}h_{m+1}\sigma_0^*\\ &= -\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2}{i+2}h_{i+1}\right)\sigma_{m-i}^*, \qquad m=1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{8.64}$$

且有

$$\sigma_m^* = \sigma_m-\sigma_{m-1} \tag{8.65}$$

相应的用右函数表达的 Cowell 隐式公式(改用与显式同样的下标)为

$$x_{n+1}-2x_n+x_{n-1} = h^2\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_{kl}^*f_{n+1-l}, \qquad k=1,2,\cdots \tag{8.66}$$

其中

$$a_{kl}^* = (-1)^l \sum_{m=l}^{k-1} \binom{m}{l} \sigma_m^*$$
$$= (-1)^l \left[\binom{l}{l} \sigma_l^* + \binom{l+1}{l} \sigma_{l-1}^* + \cdots + \binom{k-1}{l} \sigma_{k-1}^* \right] \tag{8.67}$$

同样，可将显式公式与隐式公式联合使用，建立预估-校正算法，这就构成了一个完整的Cowell 方法，又称为第一 Cowell 方法。Cowell 和 Crommelin 还推荐了用二次积分的方法，也称第二 Cowell 方法，但与第一 Cowell 方法相比，并无特点，通常采用的还是第一 Cowell 方法，因此就简称 Cowell 方法。

为了某种需要，这里也给出直到 12 阶的系数 σ_m 和 σ_m^* 值($m=0,1,\cdots,11$)，见表 5。

表 5　σ_m 和 σ_m^* 值

m	0	1	2	3	4	5
σ_m	1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{240}$	$\frac{3}{40}$
σ_m^*	1	-1	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{240}$
m	6	7	8	9	10	11
σ_m	$\frac{863}{12096}$	$\frac{825}{12096}$	$\frac{237671}{3628800}$	$\frac{229124}{3628800}$	$\frac{3250433}{53222400}$	$\frac{60723}{1025024}$
σ_m^*	$\frac{221}{60480}$	$-\frac{19}{6048}$	$-\frac{9829}{3628800}$	$\frac{8547}{3628800}$	$\frac{330157}{159667200}$	$\frac{24377}{13305600}$

3. Adams-Cowell **方法**

k 阶(即 k 步)Adams 公式的局部截断误差是 $O(h^{k+1})$，而 Cowell 公式是 $O(h^{k+2})$，因此 Cowell 公式比同阶的 Adams 公式精确。但是，天体力学在发展，考虑的因素不断增多，右函数中出现 $\dot{x}$，而且即使纯引力问题，有时也要给出 $\dot{x}$，例如人造地球卫星有摄星历表的计算，就会出现上述两种情况，这就有必要将 Adams 方法与 Cowell 方法联合使用。

考虑初值问题

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}=f(x,\dot{x},t) \\ x(t_0)=x_0, \quad \dot{x}(t_0)=\dot{x}_0 \end{array}\right\} \tag{8.68}$$

可将方程(8.68)看成 $\dot{x}$ 的一阶方程，由 Adams 公式提供 $\dot{x}$，而同时用 Cowell 公式计算 x，这比单纯用 Adams 方法有效。这种联合使用的方法就称为 Adams-Cowell 方法，在天体(包括自然天体和人造地球卫星)的精密星历表计算中常被采用。具体应用时，亦是采用预估-校正法，即显式公式与隐式公式相结合。

4. 几种方法的计算情况

对于 k 步法，必须知道 k 个步点上的值：$x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \cdots, x_n$，才能向后积分。因此，首先就

要碰到一个"起步"问题，通常采用两种方法：一是由单步法（如精度较高的 RK 方法）提供起步值，另一方法即由多步法本身通过迭代来解决。k 步法还有一个"结束"问题，即计算的"终点"问题，就是说，要计算的各时刻 $t_q(q=1,2,\cdots)$ 一般并不在步点 $t_n(n=1,2,\cdots)$ 上。这也可用两种方法来解决，一是多步法的插值公式，另一种方法即与起步相配套，用同一单步法来完成"最后"一步计算，此时对应的 $t_q-t_n<h$，h 是多步法的积分步长，这样的处理还是极其简便的。

这里将采用 RK 方法起步、结束，对几种线性多步法给出一些算例，以显示这些算法的精度与稳定状况，从而说明多步法的阶（即步）与精度高低、稳定程度的某种关系。

算例是取轨道变化比较明显的两种人造地球卫星，一是测地卫星 Lageos，另一个是一般的周期为 2^h 的近地卫星，初值分别为：

$$t_0=0,T=225^m.0,e=0.004,i=109^\circ.9,\Omega=45^\circ.0,\omega=45^\circ.0,M=0^\circ.0$$

$$t_0=0,T=120^m.0,e=0.10,\ i=50^\circ.0,\ \Omega=50^\circ.0,\omega=50^\circ.0,M=0^\circ.0$$

由于轨道偏心率不大，可用固定步长进行计算。考虑三种方法，即 Adams 预估-校正法（记为 AD-pece）、Adams-Cowell 预估法（记为 AC-pe）和预估-校正法（记为 AC-pece）。基本变量取 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$，计算无摄运动和受摄运动两种情况，后者指地球形状主要带谐项（J_2,J_3,J_4）摄动。对于这种天体的运动，计算精度的高低，主要由沿迹量（$M+\omega$）的误差大小 $\Delta(M+\omega)$ 来体现，其结果分别列于表 6 和表 7。积分步长都是每圈取 100 步。

表 6　100 圈的 $\Delta(M+\omega)$　(Kepler 运动)

	Lageos			2^hSatellite		
order	AD-pece	AC-pe	AC-pece	AD-pece	AC-pe	AC-pece
8	4.3E-7	1.7E-6	4.9E-8	0.7E-5	2.3E 5	0.6E-6
9	1.4E-7	5.6E-7	2.1E-8	2.2E-6	0.8E-5	3.1E-7
10	1.6E-9	0.8E-8	1.8E-10	1.7E-7	0.5E-6	1.8E-8
11	4.4E-10	2.2E 9	1.7E-12	1.4E-8	2.4E-8	1.4E-10
12	*	0.9E-9	2.2E-11	*	2.6E-8	1.3E-9
13	*	4.3E-10	0.9E-10	*	2.4E-8	5.1E-10
14	*	*	1.7E-10	*	*	0.8E-10
15	*	*	4.0E-10	*	*	4.0E-10
16	*	*	3.0E-10	*	*	3.0E-10
17	*	*	1.0E-9	*	*	0.9E-9
18	*	*	2.1E-9	*	*	2.2E-9
19	*	*	0.9E-9	*	*	0.8E-9
20	*	*	*	*	*	*

表 7　100 圈的 $\Delta(M+\omega)$（受摄运动）

	Lageos			2^hSatellite		
order	AD pece	AC pe	AC pece	AD pece	AC pe	AC pece
8	4.4E-7	1.7E-6	5.0E-8	1.0E-6	1.0E-5	1.0E-7
9	1.4E-7	5.5E-7	2.1E-8	2.2E-6	0.8E-5	3.0E-7
10	1.7E-9	0.9E-8	2.2E-10	1.9E-7	0.7E-6	2.2E-8
11	4.1E-10	2.0E-9	1.0E-10	1.6E-8	2.0E-8	0.6E-9
12	*	1.0E-9	2.3E-11	*	4.4E-8	1.6E-9
13	*	4.2E-10	3.0E-11	*	1.8E-8	3.0E-10
14	*	*	1.5E-10	*	*	3.5E-11
15	*	*	3.4E-10	*	*	4.6E-10
16	*	*	2.7E-10	*	*	2.5E-10
17	*	*	0.9E-9	*	*	0.9E-9
18	*	*	2.1E-9	*	*	2.2E-9
19	*	*	0.9E-9	*	*	0.8E-9
20	*	*	*	*	*	*

表 6 和表 7 分别列出了三种方法从 8 阶到 20 阶（见表内第一栏 order）的计算情况。表中 * 表示发散，如果步长 h 减小，发散情况将改变。由此不难看出如下三点：

（1）Adams-Cowell 方法显然优于单纯的 Adams 方法，预估-校正法也明显地比单纯的预估法好。

（2）多步法的阶数愈高，要使其稳定，则对计算步长有所限制。

（3）对于 AC-pece 算法，精度并不是随方法的阶数增高而增高，这与稳定性有关（即误差的增长问题），在受摄情况下，一般是 12～14 阶较好。

5. KSG 积分器

这是 Krogh-Shampine-Gordon 三位作者在 Adams-Cowell 方法基础上稍作改进给出的一种定阶、定步长多步积分器[5]，简称 KSG 积分器，其算法与 Adams-Cowell 方法不同之处在于校正过程相当简单。

仍讨论初值问题(8.68)，相应的预报公式为：

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\dot{x}_n + h^2\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{j+1}(\nabla^j f_n) \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + h\sum_{j=0}^{k-1}\beta_{j+1}(\nabla^j f_n) \end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

其中计算位置 x 的公式与 Cowell 方法的相应公式(8.56)有点差别，这里用 $\dot{x}_n$ 代替了 $(x_n - x_{n-1})/h$。引用后差分公式(8.34)，上式即可改写成右函数表达的形式，即：

$$
\left.\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h\dot{x}_n + h^2 \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l+1}^* f_{n-l} \\
\dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + h \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{l+1}^* f_{n-l}
\end{aligned}\right\} \tag{8.70}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_{l+1}^* &= (-1)^l \sum_{j=l+1}^{k} \binom{j-1}{l} \alpha_j \\
&= (-1)^l \left[\binom{l}{l} \alpha_{l+1} + \binom{l+1}{l} \alpha_{l+2} + \cdots + \binom{k-1}{l} \alpha_k\right] \\
\beta_{l+1}^* &= (-1)^l \sum_{j=l+1}^{k} \binom{j-1}{l} \beta_j \\
&= (-1)^l \left[\binom{l}{l} \beta_{l+1} + \binom{l+1}{l} \beta_{l+2} + \cdots + \binom{k-1}{l} \beta_k\right]
\end{aligned}\right\} \tag{8.71}
$$

其中 α_j、β_j($j=1,2,\cdots,k$)的计算公式为

$$
\alpha_j = g_{j,2}, \qquad \beta_j = g_{j,1} \qquad (j=1,2,\cdots k) \tag{8.72}
$$

和

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_1 = g_{1,2} = 1/2, \qquad \beta_1 = g_{1,1} = 1 \\
&\alpha_j = g_{j,2}, \qquad\qquad \beta_j = g_{j,1} \quad (j=1,2,3,\cdots,k)
\end{aligned}\right\} \tag{8.73}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&g_{1,q} = 1/q! \quad (q=1,2,\cdots,k+2) \\
&g_{j,q} = g_{j-1,q} - \frac{q}{j-1} g_{j-1,q+1} \quad (j=2,3,\cdots,k+1)
\end{aligned}\right\} \tag{8.74}
$$

这里 j 取到 $k+1$ 是为了下面校正公式中所需要的。上列系数 α_j 与 β_j 有如下关系:

$$
\alpha_j = j(\beta_j - \beta_{j-1}) \tag{8.75}
$$

校正公式为:

$$
\left.\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_{n+1}^p + h^2 \alpha_{k+1} (\nabla^k f_{n+1}^p) \\
&= x_{n+1}^p + h^2 \alpha_{k+1} (f_{n+1}^p - d_1) \\
\dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_{n+1}^p + h\beta_{k+1} (\nabla^k f_{n+1}^p) \\
&= \dot{x}_{n+1}^p + h\beta_{k+1} (f_{n+1}^p - d_1)
\end{aligned}\right\} \tag{8.76}
$$

$$
d_1 = \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_{l+1}^* f_{n-l} \tag{8.77}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{l+1}^* &= (-1)^l \sum_{j=l+1}^{k} \binom{j-1}{l} \\
&= (-1)^l \left[\binom{l}{l} + \binom{l+1}{l} + \cdots + \binom{k-1}{l}\right]
\end{aligned} \tag{8.78}
$$

其中

$$
f_{n+1}^p = f(x_{n+1}^p, \dot{x}_{n+1}^p, t_{n+1})
$$

x_{n+1}^p 和 $\dot{x}_{n+1}^p$ 是预报值。

事实上,Cowell 方法正是针对不显含 $\dot{x}$ 的二阶方程直接计算 x,相应的公式(8.56)中不出现 $\dot{x}_n$,局部截断误差比相应的解一阶方程组的同阶 Adams 算法小,而 KSG 积分器针对必须计算 $\dot{x}$,用 $\dot{x}_n$ 代替 x_n 和 x_{n-1},就局部截断误差而言,这显然是不可取的。但是,它的校正过程特别简单,既省机时又能减小舍入误差的累积。对于字长不太长的计算机,若舍入误差的累积超过

局部截断误差的累积，那么 KSG 积分器将会优于 Adams-Cowell 方法；反之，若截断误差的累积占主导地位，则 KSG 积分器的精度要比 Adams-Cowell 方法差，此时它仅能保留计算简单而省机时的优点。因此，本节专门介绍 KSG 积分器的目的，并不是着眼于精度的高低，而是想让读者了解在不同的计算"环境"下，可选择不同的算法，KSG 积分器就是一例。目前，还是有一些工作（特别是人卫精密定轨）采用 KSG 积分器。

为了证实上述论断，下面给出具体算例。仍以 Lageos 卫星的无摄运动作为计算背景，分别在 Sun 工作站和 Cray 机上采用 AC-pece 算法和 KSG-pece 算法，计算结果列于表 8。两种算法均为 10 阶，且每圈（对应无摄运动周期 T_0）取 100 步。Sun 工作站的双倍字长为 10 进制 15 位有效数字，而 Cray 机只能用单字长，只有 13 位。

表 8　两种算法的沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$

机　器	方　法	100(T_0)	1000(T_0)	10000(T_0)	30000(T_0)
Sun	AC	1.9E−10	2.4E−08	2.5E−06	2.2E−05
	KSG	2.1E−09	2.1E−07	2.1E−05	1.9E−04
Cray	AC	4.2E−08	4.2E−06	4.2E−05	3.7E−03
	KSG	1.9E−08	1.9E−06	1.9E−04	1.7E−03

从表中列出的结果可以清楚地看出，对于 Sun 工作站，舍入误差不重要，故 AC-pece 算法优于 KSG-pece 算法，而反之，在 Cray 机上，后者则不比前者差，所用机时也明显地少于前者。

关于线性多步法，近年来又出现了对于 Hamilton 系统比较有效的对称算法[6],[7]，作者先后给出了 2,4,6,10,12 和 14 阶计算公式，后又在此基础上加入了减小舍入误差的 ADD 算法[8]，并在动力天文的研究中初步得到应用。

8.4　变量的选择与相应的基本方程

求解天体运动方程，基本变量的选择是否恰当，会影响整个计算效率。对于受摄二体问题，通常有三种选择：

(1) 运动天体的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$，这是被普遍采用的一种变量，它不仅适用于受摄二体问题，同样在一般 N 体（$N\geqslant 3$）问题和限制性三体问题中也常被采用。

(2) 运动天体的摄动坐标矢量 $\boldsymbol{u}$ 和相应的速度矢量 $\dot{\boldsymbol{u}}$，即

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c,\qquad \dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{r}}_c \tag{8.79}$$

其中 $\boldsymbol{r}_c$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_c$ 对应参考轨道，这在第二章中曾提到过。关于参考轨道，最简单的选择是将它取为运动天体对应的无摄轨道。

(3) 在一定条件下，用运动天体的轨道根数 σ（对应变化椭圆）代替上述摄动坐标和速度。

下面分别介绍这三种选择和相应的运动方程，以及它们在实际应用中的有关问题。

1. $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 作为基本变量

初值问题为

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)\\&\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}_0\quad,\quad \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}_0\end{aligned}\right\}\tag{8.80}$$

对于一般 N 体问题，$\boldsymbol{r}$、$\dot{\boldsymbol{r}}$、$\ddot{\boldsymbol{r}}$ 应理解为 N 个天体的坐标、速度和加速度。对于受摄二体问题，右函数 $\boldsymbol{F}$ 可分成两部分，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_0(r)+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon)\ ,\quad \varepsilon\ll 1\tag{8.81}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_0=-G(M+m)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\tag{8.82}$$

是中心引力加速度，M 和 m 各为中心天体和运动天体的质量，而 $\boldsymbol{F}_1$ 是摄动加速度。

采用这种变量的原因很明显，方程右函数 $\boldsymbol{F}$ 的形式简单，而计算效率的高低，往往取决于右函数简单与否。这种选择的缺点是右函数包含无摄部分，变化快，在一定精度要求下，积分步长往往被限制得较小。

2. $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 作为基本变量

对于这种变量，相应的初值问题为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{u}}&=\ddot{\boldsymbol{r}}-\ddot{\boldsymbol{r}}_c\\&=\quad(\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}+\ddot{\boldsymbol{r}}_c)+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{r}_c,\dot{\boldsymbol{r}}_c,t;\varepsilon)\\ \boldsymbol{u}(t_0)&=\boldsymbol{u}_0,\qquad \dot{\boldsymbol{u}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{u}}_0\end{aligned}\right\}\tag{8.83}$$

其中 $\mu=G(M+m)$，初始条件 $\boldsymbol{u}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}_0$ 为：

$$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_c(t_0),\qquad \dot{\boldsymbol{u}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}_0-\dot{\boldsymbol{r}}_c(t_0)\tag{8.84}$$

这里参考轨道取不变椭圆，$\ddot{\boldsymbol{r}}_c=-\mu\boldsymbol{r}_c/r_c^3$，有严格解 $\boldsymbol{r}_c(t)$、$\dot{\boldsymbol{r}}_c(t)$，且

$$\boldsymbol{u}_0=0,\qquad \dot{\boldsymbol{u}}_0=0$$

在上述选择下，对于同一精度要求，其积分步长显然可以取得比第一种情况大。但每一步要增加参考轨道星历表的计算，而且当摄动变化较快时，还要逐段改变计算零点，即逐段校正参考轨道，这将导致不断初始化的问题。

既然是计算摄动量，那么可直接采用轨道根数作为基本变量，这就不会出现每一步还要计算参考轨道的问题。

3. 轨道根数 σ 作为基本变量

此时，初值问题的提法是：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\sigma}=f(\sigma,t;\varepsilon)\ ,\quad \varepsilon\ll 1\\&\sigma(t_0)=\sigma_0\end{aligned}\right\}\tag{8.85}$$

如果 σ 取为六个常用的 Kepler 根数：a,e,i,Ω,ω,M，并采用一般摄动运动方程的形式（见第二章 2.2），在此情况下，若将右函数 f 表示成轨道根数的形式 $f(\sigma,t;\varepsilon)$，那么，其具体表达式显然比较复杂，特别当存在多种摄动因素时，就更加如此。为了适用数值方法，这里介绍一种变量的选择和相应的方程右函数的表达形式。

σ 取 a,e,i,Ω,ω,E，用 E 代替 M 的目的，是为了在采用下述右函数的表达形式时，避免解 Kepler 方程的麻烦。相应的右函数 $f(\sigma,t;\varepsilon)$ 将由第一种变量选择中的 $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon)$ 形成，具体形式如下：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}[e(S\sin f+T\cos f)+T]\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[(S\sin f+T\cos f)+T\cos E]\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{rW}{na^2\sqrt{1-e^2}}\right)\cos(f+\omega)\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{rW}{na^2\sqrt{1-e^2}}\right)\frac{\sin(f+\omega)}{\sin i}\\
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_1-\cos i\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}&=\frac{a}{r}\left[n-\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_1+\sin E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right]-\frac{2}{na}S
\end{aligned}\right\}\tag{8.86}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)_1=\frac{1}{nae}[\sqrt{1-e^2}(-S\cos f+T\sin f)+T\sin E]\tag{8.87}$$

其中 $n=\sqrt{\mu}a^{-3/2}$，$\mu=G(M+m)$，而 $\sin f$ 和 $\cos f$ 可由 $\sin E$ 和 $\cos E$ 给出，即：

$$\left.\begin{aligned}
r\sin f&=a\sqrt{1-e^2}\sin E\\
r\cos f&=a(\cos E-e)\\
r&=a(1-e\cos E)
\end{aligned}\right\}\tag{8.88}$$

如果偏心率 $e\approx0$，则变量 E 可改为 $E+\omega$，相应的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E+\omega)$ 的右函数不再出现 $\frac{1}{e}$ 这种因子。关于该问题，在第五章中已介绍过。剩下的问题是加速度分量 S,T,W 如何由 $\boldsymbol{F}_1$ 形成？

根据第二章 2.2 中的论述，可知：

$$S=\boldsymbol{F}_1\cdot\hat{r},\quad T=\boldsymbol{F}_1\cdot\hat{t},\quad W=\boldsymbol{F}_1\cdot\hat{w}\tag{8.89}$$

其中 $\hat{r},\hat{t},\hat{w}$ 分别为径向、横向、轨道面法向单位矢量，有：

$$\left.\begin{aligned}
\hat{r}&=\cos u\hat{P}_*+\sin u\hat{Q}_*\\
\hat{t}&=-\sin u\hat{P}_*+\cos u\hat{Q}_*\\
\hat{w}&=\hat{r}\times\hat{t}
\end{aligned}\right\}\tag{8.90}$$

其中 $u=f+\omega$。这里为了计算方便，采用单位矢量 $\hat{P}_*$ 和 $\hat{Q}_*$，而不是第一章中的 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$，其表达式不难给出，即

$$\hat{P}_*=\begin{pmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{pmatrix},\quad \hat{Q}_*=\begin{pmatrix}-\sin\Omega\cos i\\ \cos\Omega\cos i\\ \sin i\end{pmatrix}\tag{8.91}$$

相应地有

$$\hat{r}\times\hat{t}=\hat{P}_*\times\hat{Q}_*=\begin{pmatrix}\sin\Omega\sin i\\-\cos\Omega\sin i\\\cos i\end{pmatrix} \tag{8.92}$$

$\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的计算公式则变为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}=r\hat{r}\\&\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r}\left[\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin E\right)\hat{r}+\hat{t}\right]\end{aligned}\right\} \tag{8.93}$$

从上述表达式可以清楚地看出，对于这种形式，计算右函数并不十分复杂，特别当摄动因素较多时，例如人造地球卫星在多种摄动因素影响下的运动，具有大偏心率轨道的小行星在多个大行星影响下的运动，乃至大行星的运动等，此时 $\boldsymbol{F}_1$ 本身就比较复杂，第一种选择中的 $\boldsymbol{F}_1$ 或整个 $\boldsymbol{F}$ 的计算量，与方程(8.86)右函数的计算量相差甚微，只多一步 $\boldsymbol{F}_1$ 到 S,T,W 的转换，而这一步转换相对 $\boldsymbol{F}_1$ 的计算量所占的比例甚小。但这种形式的方程积分步长可以取得大些，整个计算量反而减小；若取相同步长，则局部截断误差明显地减小，计算精度将会提高。因此，选择轨道根数作为自变量，在摄动加速度 $\boldsymbol{F}_1$ 本身复杂的情况下，还是有其实用价值的。

对于动力天文的研究，在引用数值方法求解运动方程时，除上述变量的适当选择外，还会遇到一些天体运动所特有的问题。其一是 N 体问题中两天体的相互接近，受摄二体问题中运动天体在大偏心率轨道上的运动，都将涉及到变步长问题，这对多步法是不利的。关于该问题，将在下一节(8.5)中讨论。另一个是误差累积问题。对于短弧计算，精度主要取决于截断误差的累积，不论单步法还是多步法，只要方法的阶数稍高，积分步长不太大，完全可以保证精度。但对于长期演化的“跟踪”计算或长弧定轨问题则不然，误差的累积将成为严重问题，而几乎所有传统的数值方法都存在人工耗散，它使得能量(或轨道半长径 a)误差“线性”增长，从而导致运动性质被歪曲，计算失真，或沿迹误差快速增长，最终无法满足精度要求，在人造地球卫星长弧(可长到 10 多年)精度定轨中，往往使迭代过程发散。关于这一问题的理论分析以及如何给出相应的算法，以使所研究的问题能保持整体的几何结构(特征)，将在下一章中介绍，而本章将从定量角度，在 8.6 和 8.7 两节中分别介绍两种不同类型的提高精度的算法。

8.5 步长均匀化问题

在 $N(N\geqslant3)$ 体问题中，有一实质性奇点，即碰撞奇点。对于单重碰撞，可以采用正规化方法消除这一奇点[9],[10]。不过，这是指质点碰撞，仅在理论研究中出现。而常遇到的是两天体接近碰撞的情况，如限制性三体问题中，小天体与两有限天体之一极其靠近时的状态，受摄二体问题中运动天体在大偏心率轨道(例如发射 24h 地球同步卫星的过渡轨道，$e\geqslant0.7$，金星轨道器 PVO 的轨道，$e=0.843$)上处于近星点的运动状态，都因它们与主天体或中心天体相互接近而引起加速度的急剧增大，尽管未发生碰撞，但从数值解的角度来看，在这种状态下，相应的积分步长需要迅速地改变，尤其在定性研究中，如果处理不当，不仅影响解的精度，而且有可能人为地导致运动性态的改变，使结果失真。即使在原方法基础上尽量调整步长，以确保计算精度，或不出“错误”，但毕竟不方便，尤其是多步法。这一问题可引用正规化方法中的自变量变换加以解决，当然，同时进行变量变换显得更加完善，可这将使整个计算复杂化，实无必要。下面将

就受摄二体问题(限制性三体问题中小天体仅在一个大天体附近运动亦属此类)进行具体讨论。

对于受摄二体问题,相应的自变量变换取为下列形式:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=r^{p}, \qquad p\geqslant 1 \tag{8.94}$$

s 即新自变量,p 是可调参数。由变换关系(8.94)式不难看出,对于 s 而言,步长取为常数时,原自变量时间 t 对应的却是变步长,它由因子 r^p 的大小来调节。因此,正规化方法中的自变量变换(8.94)式实际上是一个时间尺度的变化,它起到步长均匀化的作用。

引用变换(8.94)可有两种方式,下面分别介绍。

1. 基本变量仍用 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$

对于初值问题(8.80),变换后的基本方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=r^{p}\dot{\boldsymbol{r}}\\&\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s}=r^{p}\boldsymbol{F}\\&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=r^{p}\end{aligned}\right\} \tag{8.95}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 即原运动方程(8.80)的右函数。

2. 基本变量改用 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$

不难导出基本方程的形式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{r}'\\&\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}s}=r^{2p}\boldsymbol{F}+p\left(\frac{r'}{r}\right)\boldsymbol{r}'\\&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=r^{p}\end{aligned}\right\} \tag{8.96}$$

其中

$$r'=\boldsymbol{r}'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{8.97}$$

对于定性研究,若不需要知道 s 对应的原时刻 t,那么上述两种情况均可删去 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s=r^p$ 这一方程。前一种形式直接给出 $\boldsymbol{r}(s),\dot{\boldsymbol{r}}(s)$,而后一种直接给出的是 $\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{r}'(s)$,再由

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{r}'(s)/r^{p} \tag{8.98}$$

可给出所需要的速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$。显然,形式(8.95)的计算过程比较简单,其右函数与原运动方程的右函数仅差一个因子 r^p。但是,这种形式仅适用于单步法和解一阶方程组的多步法(如 Adams 方法),若用 Adams-Cowell 方法,必须采用第二种形式(8.96)。

步长均匀化的关键在于时间变换因子 r^p 中参数 p 的选取。尽管在二体问题和限制性三体问题中,取 $p=1$ 或 2,都可以消除碰撞奇点,但对给出完整轨道的数值解而言,要使整个积分

过程中步长保持不变，就不那么简单了，本章参考文献[11]中曾作过较全面的讨论，作者也对参数 p 的具体选择作了一些探索。研究表明：对于受摄二体问题，引用方程(8.95)时，取 $p=3/2$ 最佳，而引用方程(8.96)时，则取 $p=1$ 为最佳[12]。

3. 计算结果及其分析

为了表明上述步长均匀化方法的有效性，以金星轨道器 PVO(偏心率 $e=0.843$)的无摄运动为例，积分 1000 圈看其效果，计算结果(沿迹误差)列于表 9。表中 T_0 表示无摄运动周期，T_0/h 表示每圈积分步数。积分器类型(type)这一栏的 RK 是 Runge-Kutta 单步积分器，AD 是 Adams 型多步积分器，AC 是 Adams-Cowell 型多步积分器；RK_z 和 AD_z 分别为对 RK 和 AD 积分器采用了时间变换的步长均匀化技术，对应基本方程(8.95)；而 RK_z2，AD_z2 和 AC_z 则分别对应基本方程(8.96)。

数值结果表明，步长均匀化方法确是有效的，对于如此大的偏心率，积分步长也可以“固定”不变，它不仅保证了计算精度(注意，表 9 中列出的 RK 这一行，未引用步长均匀化方法，而是采用了小步长，每圈 800 步，结果仍较差)，而且十分简便，尤其对多步积分器更显示出它的方便之处。这一步长均匀化方法，对于其它大偏心率轨道等类似运动的积分问题，当然也是适用的。计算结果还表明，对于不同的积分器，不同的偏心率，效果是有差别的，这与参数 p 的选择以及各积分器的固有特点有关，在具体问题中可进行适当的选择。如果偏心率很小(例如 Lageos 卫星)，那么对于上述积分器和参数 p 的两种选择，其效果都将互相接近，但仍比不采用步长均匀化(计算仍用定步长)的效果好，见表 10。

这里必须说明一点，从表 9 和表 10 都可以看出，沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$ 的增长速度是快的，但它与步长均匀化方法无关，这是各种传统的积分器本身所固有的问题，即上节末所提到的，它是由于积分器的截断误差导致的人为的能量耗散引起的后果。相应的能量误差(用 $\Delta a/a$ 表示)列于表 11。关于该问题，将留待下一章去详细讨论。

在步长均匀化后的计算过程中，最大与最小截断误差之间的差别不超过一个量级，这显然优于一般变步长方法，而且过程简单，耗费机时小。这种根据所讨论问题的特点，改进数值方法的积分过程，尽管并无理论价值，但确有实用意义。

表 9　$\Delta(M+\omega)$　(PVO，$e=0.843$)

type	order	T_0/h	$10T_0$	$100T_0$	$1000T_0$
RK	7(8)	800	2.6E−08	2.5E−06	2.4E−04
RK_z	7(8)	100	1.2E−10	1.2E−08	1.2E−06
RK_z2	7(8)	100	3.6E−09	3.4E−07	3.4E−05
AD_z	12	150	1.0E−09	0.3E−08	6.0E−07
AD_z2	12	150	1.7E−14	1.7E−12	7.6E−10
AC_z	12	150	2.8E−11	5.6E−08	5.1E−05

表 10　$\Delta(M+\omega)$　(Lageos, $e=0.004$)

type	order	T_0/h	$10T_0$	$100T_0$	$1000T_0$
RK	7(8)	100	2.4E-12	1.5E-10	1.3E-08
RK_z	7(8)	100	1.1E-14	0.7E-12	0.8E-10
RK_z2	7(8)	100	1.4E-13	1.3E-11	1.3E-09
AD	11	100	4.9E-12	4.5E-10	4.5E-08
AD_z	12	100	1.2E-13	1.2E-11	1.2E-09
AD_z2	12	100	0.7E-13	0.4E-11	0.6E-09
AC	12	100	0.8E-12	0.7E-10	0.8E-08
AC_z	12	100	0.5E-13	0.6E-11	0.7E-09

表 11　$\Delta a/a$　(PVO, $e=0.843$)

type	order	T_0/h	$10T_0$	$100T_0$	$1000T_0$
RK_z	7(8)	100	2.5E-12	2.5E-11	2.5E-10
RK_z2	7(8)	100	0.7E-10	0.7E-09	0.7E-08
AD_z	12	150	0.9E-11	3.7E-11	1.4E-10
AD_z2	12	150	1.0E-14	2.5E-14	2.5E-13
AC_z	12	150	1.0E-12	1.8E-10	1.6E-08

8.6　改进的 Encke 方法

本节将针对长弧定轨的高精度要求，通过计算摄动变量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 来给出所需要的坐标矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$，其原始算法即 Encke 方法，但它并不是一种新积分器，而是在原有积分器中采用摄动变量而已。

1. Encke 方法所采用的基本方程

8.4 节已提出，若取摄动坐标矢量 $\boldsymbol{u}$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{u}}$：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c,\qquad \dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{r}}_c$$

作为基本变量，则相应的基本方程为

$$\ddot{\boldsymbol{u}}=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}=\ddot{\boldsymbol{r}}-\ddot{\boldsymbol{r}}_c=-\mu\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{r}_c}{r_c^3}\right)+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{r}_c,\dot{\boldsymbol{r}}_c,t;\varepsilon)\tag{8.99}$$

ε 是摄动小参数，有 $\varepsilon\ll 1$。

这里参考轨道已取为无摄轨道，由于摄动量较小，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_c$ 的值相近，计算右函数的第一大

项时要损失有效数字。为此，Encke 引进了下述变换[13]：

$$\left.\begin{aligned} q&=\frac{1}{r_c^2}\left(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right)\\ F(q)&=1-(1+2q)^{-3/2}\end{aligned}\right\} \tag{8.100}$$

相应的方程(8.99)变为

$$\ddot{\boldsymbol{u}}=\frac{\mu}{r_c^3}[F(q)\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}]+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{r}_c,\dot{\boldsymbol{r}}_c,t;\varepsilon) \tag{8.101}$$

此即 Encke 方法采用的基本方程，该方程避免了右函数中$\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{r}_c}{r_c^3}\right)$项的直接计算。不过，在当今计算机高度发展的时代，硬、软件都提供了极好的条件，有效字长增长，在长弧定轨计算中，数值误差累积的严重性，决不是由于$\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{r}_c}{r_c^3}\right)$损失几位有效数字所造成。因此，在摄动坐标的数值计算中，采用 Encke 变换已没有实用价值。下一节给出的计算结果将会证实这一点，即采用基本方程(8.99)和(8.101)的结果，几乎相同。

2. **改进的 Encke 方法**

事实上，对于数值方法，右函数本身的数值大小固然很重要，而它的变化快慢亦不可忽视。因此，尽管 Encke 方法直接计算的是摄动坐标 $\boldsymbol{u}$(不妨称其为 Encke 矢量)，但由于摄动影响，真实轨道与参考轨道的偏离越来越大，这将导致$|\boldsymbol{u}|$的量级很快就可达到 $O(r)$，那么计算 $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 的效果就与直接计算 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的效果几乎无差别了。因此，还是不能解决长弧定轨中的高精度要求。于是有人提出在计算 $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 时，对参考轨道加以改进[14],[15]，使其包含主要摄动项，这类似于中间轨道摄动法的思想。例如，考虑到人造地球卫星轨道的特征，尽量使参考轨道包含地球非球形引力位摄动的主要项，同时又照顾到不致引起计算的复杂化。在此前提下，比较理想的选择是包含 J_2 的一阶长期摄动项(相应公式很简单)，这样既消除了右函数 $\boldsymbol{F}_1$ 中最大的摄动项，又未使计算公式复杂化。如果把 J_2 的一阶短周期项(相应公式较复杂)也包括进去，参考轨道似乎更理想些，但对数值计算而言，将引起麻烦，实不可取。下面就以这一背景为例，给出改进的 Encke 方法的具体计算过程。

在上述考虑下，有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c\\ \boldsymbol{r}_c&=\boldsymbol{r}_c(\bar{\sigma})\end{aligned}\right\} \tag{8.102}$$

$\bar{\sigma}$ 是参考轨道的瞬时根数，即

$$\bar{\sigma}=(\bar{a},\bar{e},\bar{i},\bar{\Omega},\bar{\omega},\bar{M})^{\mathrm{T}} \tag{8.103}$$

T 表示转置。$a,e,\cdots,M$ 是常用的 Kepler 根数，根据对参考轨道的选择，有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}=a_0,\quad \bar{e}=e_0,\quad \bar{i}=i_0\\ &\bar{\Omega}=\Omega_0+\Omega_1(t-t_0)\\ &\bar{\omega}=\omega_0+\omega_1(t-t_0)\\ &\bar{M}=M_0+(n_0+M_1)(t-t_0)\end{aligned}\right\} \tag{8.104}$$

其中 n 与 a 的关系 8.4 节已给出过，$\sigma_0=\sigma(t_0)$是初始根数，Ω_1,ω_1,M_1 为 J_2 项摄动引起的根数变化的一阶长期项系数，这在第三章中已导出，即：

$$
\left.\begin{aligned}
\Omega_1 &= -\frac{3J_2}{2p^2}n\cos i \\
\omega_1 &= \frac{3J_2}{2p^2}n\left(2-\frac{5}{2}\sin^2 i\right) \\
M_1 &= \frac{3J_2}{2p^2}n\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2}
\end{aligned}\right\} \tag{8.105}
$$

其中 $p=a(1-e^2)$，a,e,i 均为上述参考轨道对应的根数。

在 σ_0 取为初始瞬时根数的情况下，由于 M 的变化有零阶项 n_0，因此上述选择并没有使参考轨道包含全部一阶长期项。进一步的修正是，(8.104)式中的 a_0 改为 $\bar{a}_0$，相应的 n_0 由 $\bar{n}_0=\bar{a}_0^{-3/2}$ 代替，$\bar{a}_0$ 由下式定义：

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{a}_0 &= a_0 - a_s^{(1)}(t_0) \\
a_s^{(1)} &= \frac{3J_2}{2a}\left\{\left(\frac{2}{3}-\sin^2 i\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3-(1-e^2)^{-3/2}\right]+\sin^2 i\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2(f+\omega)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{8.106}
$$

在这种选择下，参考轨道就变为包含全部一阶长期摄动项的平均轨道，这一点是容易理解的，详见第三章的有关内容。

上述对参考轨道的修改，相应的方法即称为改进的摄动坐标数值计算方法，或称改进的 Encke 方法，但并不需要采用 Encke 变换(8.100)。显然，在弧段不太长的情况下，计算效果要比原方法好，而弧段很长时，摄动坐标变化中包含高阶摄动项的影响将要在右函数中反映出来，如果不逐段改变计算"零点"(即校正参考轨道)，效果会变得差些，下一节将用计算结果证实这一点。不过，其效果总比未改进的 Encke 方法好。

按上述选取，由(8.102)定义的摄动坐标 $\boldsymbol{u}(t)$ 的变化满足下列方程：

$$
\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{r}} - \left[\dot{\boldsymbol{r}}_c + \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \Omega}\Omega_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \omega}\omega_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial M}M_1\right)\right] \tag{8.107}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{u}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}_c;\boldsymbol{\varepsilon}) \\
&\quad -\left[\left(1+\frac{M_1}{n}\right)^2\left(-\frac{\boldsymbol{r}_c}{r^3}\right) + 2\left(1+\frac{M_1}{n}\right)\left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \Omega}\Omega_1 + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \omega}\omega_1\right)\right. \\
&\quad \left. -\omega_1^2 \boldsymbol{r}_c - \Omega_1^2 \boldsymbol{A} - 2\Omega_1\omega_1 \boldsymbol{B}\right]
\end{aligned} \tag{8.108}
$$

其中

$$
\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_c = \frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial t} \tag{8.109}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} x_c R_z - z_c R_x \\ y_c R_z - z_c R_y \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin i\,\cos\omega \\ -\sin i\,\sin\omega \\ \cos i \end{pmatrix} \tag{8.110}
$$

几个偏导数 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \sigma}$，$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \sigma}$ 的表达式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \Omega} = \begin{pmatrix} -y_c \\ x_c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \omega} = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{r}_c, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial M} = \frac{1}{n}\dot{\boldsymbol{r}}_c \\
&\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \Omega} = \begin{pmatrix} -\dot{y}_c \\ \dot{x}_c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \omega} = \boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{r}}_c, \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial M} = -\frac{1}{n}\left(\frac{\boldsymbol{r}_c}{r_c^3}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{8.111}
$$

这组偏导数在第一章中已给出过。上列各式中已取地球引力常数 $\mu=1$,且出现的根数 σ 皆为参考轨道的瞬时根数。

若数值方法采用单步法或求解一阶方程组的 Adams 方法之类的多步法,上述基本方程还可简单些,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}-[\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial t}+(\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \Omega}\Omega_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \omega}\omega_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial M}M_1)] \tag{8.112}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}&=\ddot{\boldsymbol{r}}-[\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial t}+(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \Omega}\Omega_1+\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \omega}\omega_1+\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial M}M_1)]\\&=-\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{r}_c}{r_c^3}\right)+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}_c;\varepsilon)+(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \Omega}\Omega_1+\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \omega}\omega_1+\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial M}M_1)\end{aligned} \tag{8.113}$$

这里 $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 相互独立,其定义为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c,\qquad \dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{r}}_c \tag{8.114}$$

因此(8.112)和(8.113)式给出的 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}}/\mathrm{d}t$ 并不是 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{u}}$。方程(8.113)虽比(8.108)简单,却不适用于解二阶微分方程的 Cowell 方法之类的多步法。

如果摄动变化较快,在作长弧计算时,改进的 Encke 方法仍需要逐段校正参考轨道,否则 $\boldsymbol{u}$ 将不是小量,方法的特点即消失。逐段校正参考轨道就意味着在计算过程中要不断初始化,这对单步法无妨,可对多步法是极其不利的。因此,曾有人提出在人卫长弧精密定轨中,将参考轨道取得更接近真实轨道,但不是分析形式,而是一种数值逼近轨道,即首先分段计算,以给出整个长弧段上的一种平均轨道:

$$\bar{\sigma}(t)=\bar{\sigma}_0+\sigma_1(t-t_0)+\sigma_2(t-t_0)^2+\cdots \tag{8.115}$$

甚至还包含主要长周期项,以此作为参考轨道,从而计算出 $\boldsymbol{r}_c(\bar{\sigma}),\dot{\boldsymbol{r}}_c(\bar{\sigma})$。这样做可明显地减少计算过程中校正参考轨道的次数,但付出的代价太"大",除参考轨道的获得需要大量的计算外,还将导致计算 Encke 矢量 $\boldsymbol{u}$ 的基本方程复杂化,不再像方程(8.107)~(8.108)或(8.112)~(8.113)那么简单。而且在无法包含短周期项的同时,包含长周期项是无意义的,因为它们在 Encke 矢量 $\boldsymbol{u}$ 的增长中起着同样的作用。若要进一步改进参考轨道,以减少计算中的校正次数,需在前面的基础上再包含二阶长期项中的主要部分会显得更有其实用价值,它将不改变前而的基本方程[16]。

在上述两种类型的方程中,都涉及到 $\partial \boldsymbol{r}_c/\partial t$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_c/\mathrm{d}t=\dot{\boldsymbol{r}}_c$ 的问题,从数值角度而言,它们都按照瞬时参考轨道计算,相应的公式即第一章中给出的速度公式 $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}(\sigma)$,这在第二章中有说明。

最后说明一点,为了避免参考轨道的计算中解 Kepler 方程的麻烦,亦可像上一节以轨道根数作为自变量那样,用偏近点角 E 代替平近点角 M,相应的方程(8.112)和(8.113)将变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}-[\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial t}+(\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \Omega}\Omega_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial \omega}\omega_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial E}E_1)] \tag{8.116}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\boldsymbol{r}_c}{r_c^3}\right)+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}_c;\varepsilon)+(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \Omega}\Omega_1+\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial \omega}\omega_1+\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial E}E_1) \tag{8.117}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial E}=\frac{1}{n}(\frac{r}{a})\dot{\boldsymbol{r}}_c \tag{8.118}$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_c}{\partial E}=-n(\frac{r}{a})^2\boldsymbol{r}_c \tag{8.119}$$

与方程(8.107),(8.108)对应的形式不再列出,推导过程类似。剩下的问题是平均根数 $\bar{E}$ 的表

达形式，亦即 E_1 的表达式，这可由 8.4 节的方程组(8.86)的第六个方程视具体摄动背景导出，其形式要比 M_1 的相应形式复杂一些。

8.7 能量补偿方法

这一节将从定量角度介绍另一种提高计算精度的方法，它是用能量补偿的方式消除数值方法中的人工耗散，从而达到控制天体运动沿迹误差快速增长(故而也叫能量控制技术)的目的，以此满足长弧计算中的高精度要求[17]~[20]。下面分三种情况进行讨论。

1. 定常 Hamilton 系统

对一受摄二体问题，当摄动力是保守力且与时间 t 无关时，对应定常 Hamilton 系统。例如卫星绕大行星(即中心天体)运动，若只考虑中心天体的扁率摄动，即构成这种系统。采用 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$ 作为基本变量，相应的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r},\varepsilon_1) \quad , \quad \varepsilon_1\ll 1\\&\boldsymbol{F}_1=\mathrm{grad}R(\boldsymbol{r},\varepsilon_1)\end{aligned}\right\} \tag{8.120}$$

其中 R 为相应的摄动函数，可以将小参数 ε_1 提出，即：

$$R(\boldsymbol{r},\varepsilon)=\varepsilon_1R_1(\boldsymbol{r})-\varepsilon_1R_1(a,e,i,\Omega,\omega,M) \tag{8.121}$$

对这种系统，Hamilton 函数 H 不显含 t，存在能量积分：

$$\left.\begin{aligned}&H=\frac{\mu}{2a}+\varepsilon_1R_1(\boldsymbol{r})=h_0\\&h_0=H(t_0)\end{aligned}\right\} \tag{8.122}$$

或写成

$$H=-\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2-\frac{\mu}{r}\right)+\varepsilon_1R_1(\boldsymbol{r})=h_0 \tag{8.123}$$

注意，这里 Hamilton 函数 H 与第七章中的写法相同，而与通常所用的形式相差一符号。

不难看出，能量积分(8.122)有一特点，即零阶项只包含一个根数 a，因此可由精度低的 $\boldsymbol{r}$ (或根数 $a,e,\cdots,M$)，给出精度高一阶的 a：

$$a=\frac{\mu}{2}[h_0-\varepsilon_1R_1(\boldsymbol{r})]^{-1} \tag{8.124}$$

这在第三章分析方法中亦用到过类似的特点：由一阶摄动项可求出 a 的二阶摄动项。而在数值解的过程中，提高 a 的精度就等价于对能量的人工耗散的一种补偿。剩下的问题是如何通过补偿后的 a 修正 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的值。根据第一章的知识可知，$\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 与 a 的关系较特殊，a 可从表达式中分离出，即

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}=a[(\cos E-e)\hat{P}+\sqrt{1-e^2}\sin E\hat{Q}]\\&\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{1-e\cos E}\right)[-\sin E\hat{P}+\sqrt{1-e^2}\cos E\hat{Q}]\end{aligned}\right\} \tag{8.125}$$

$\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 只与 i,Ω,ω 有关。由此不难看出，可通过补偿后的 a 改进 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$，以此达到控制沿迹误

差快速增长的目的。如果用轨道根数作为基本变量,那么,每步计算只需补偿 a 即可达到控制沿迹误差快速增长的目的。

下面仍以 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 作为基本变量,给出能量补偿的具体步骤:

(1)由 $\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0$ 计算 h_0,即:

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= \frac{\mu}{2a_0} + \varepsilon_1 R_1(\boldsymbol{r}_0) \\ a_0 &= \left(\frac{2}{r} - \frac{v_0^2}{\mu}\right)^{-1}, \quad v_0^2 = \dot{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_0 \end{aligned}\right\} \tag{8.126}$$

(2)在数值解过程中,每一步首先按原方法由 $t_n, \boldsymbol{r}_n, \dot{\boldsymbol{r}}_n$ 算出 $t_{n+1}, \boldsymbol{r}_{n+1}, \dot{\boldsymbol{r}}_{n+1}$,以此作为 t_{n+1} 时刻的“近似”,记作 $\boldsymbol{r}_{n+1}^{(0)}, \dot{\boldsymbol{r}}_{n+1}^{(0)}$,相应地有:

$$a_{n+1}^{(0)} = \left(\frac{2}{r_{n+1}^{(0)}} - \frac{v_{n+1}^{(0)^2}}{\mu}\right)^{-1} \tag{8.127}$$

(3)提高 a 的精度(即能量补偿),从而改进该步的 $\boldsymbol{r}_{n+1}, \dot{\boldsymbol{r}}_{n+1}$ 值,即:

$$a_{n+1} = \frac{\mu}{2}\left[h_0 - \varepsilon_1 R_1(\boldsymbol{r}_{n+1}^{(0)})\right]^{-1} \tag{8.128}$$

$$\boldsymbol{r}_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}^{(0)}} \boldsymbol{r}_{n+1}^{(0)}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_{n+1} = \left(\frac{a_{n+1}^{(0)}}{a_{n+1}}\right)^{1/2} \dot{\boldsymbol{r}}_{n+1}^{(0)} \tag{8.129}$$

以此改进后的 $\boldsymbol{r}_{n+1}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_{n+1}$ 作为该步的真正值,它们对应的是经过补偿后的高精度的 a_{n+1}。

2. 非定常 Hamilton 系统

在受摄二体问题系统中,若存在第三体摄动等因素,则相应的 Hamilton 函数将显含 t,这就构成非定常 Hamilton 系统。当然,用正则扩充的方法,可以将其变为定常 Hamilton 系统,但是,对我们要讨论的问题不会带来任何方便,因为总是要计算能量变化的。既然如此,仍作为非定常 Hamilton 系统来处理,将相应的 Hamilton 函数分为两部分,即:

$$R = \varepsilon_1 R_1(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_2 R_2(\boldsymbol{r}, t) \tag{8.130}$$

记

$$H = \frac{\mu}{2a} + \varepsilon_1 R_1(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_2 R_2(\boldsymbol{r}, t) = h(t) \tag{8.131}$$

相应地有

$$a = \frac{\mu}{2}\left[h(t) - (\varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_2 R_2)\right]^{-1} \tag{8.132}$$

不难导出

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = \varepsilon_2\left(\frac{\partial R_2}{\partial t}\right) \tag{8.133}$$

如果仍采用上一段的方法对人工耗散进行补偿,则必须同时计算 $h(t)$,而当 ε_2 明显地比 ε_1 小时,$h(t)$的计算精度要比 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的精度高得多,完全可以达到控制沿迹误差快速增长的目的。人造卫星绕地球运动的动力模型即属这种情况,这在第三章中已介绍过,除地球扁率 J_2 项摄动量级较大外,其它摄动加速度(包括定常和非定常项)的量级几乎都是 J_2^2,甚至更小,即 $\varepsilon_2 = O(\varepsilon_1^2)$。具体计算步骤与定常情况相同,只是 $h_0 = h(t_0)$ 改按(8.131)式计算,补偿后的 a 改由(8.132)式计算,而求数值解的方程增加一阶,即(8.133)式。

3. 耗散系统

该系统存在一非保守力，相应的摄动加速度记为 $\boldsymbol{D}$。事实上在第二种情况中，亦可将非定常保守力 $\varepsilon_2 \mathrm{grad} R_2$ 按耗散力处理，即统一记成 $\boldsymbol{D}$。为此定义：

$$H=\frac{\mu}{2a}+\varepsilon_1 R_1(\boldsymbol{r})=h(t) \tag{8.134}$$

相应地有

$$a=\frac{\mu}{2}\left[h(t)-\varepsilon_1 R_1(\boldsymbol{r})\right]^{-1} \tag{8.135}$$

根据上述记法，运动方程为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial H}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}=\dot{\boldsymbol{r}}\\ \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{D}\end{aligned}\right\} \tag{8.136}$$

而由(8.134)式得：

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial H}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{D})\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}$$

于是给出 $h(t)$ 变化的另种表达式，即：

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{8.137}$$

这是一种极其简单的形式，而且力学意义清楚，即能量变化仅取决于摄动力的切向分量，若摄动力沿天体运动反方向，则能量减小。但要注意，能量应是 $-H$。

只要满足 $|\boldsymbol{D}|\ll|\varepsilon_1 \mathrm{grad} R_1|$，则前面提出的能量补偿方法仍有效，而对动力天文而言，除近地卫星运行的最后阶段（进入 200km 以下的稠密大气层）外，几乎所有的力学系统均满足这一条件。

4. 计算结果

为了证实一般数值方法存在人为的能量耗散（即差分格式导致的能量耗损）、Encke 变换几乎无用，以及本节介绍的能量补偿的实际效果，这里将给出一批计算实例。计算仍针对轨道变化明显的人造地球卫星，这便于说明问题，和 8.3 中一样，取两种类型的卫星，即高轨的 Lageos 卫星和低轨的 2# 卫星，初始数据亦和前面相同。计算结果分别列于表 12～24，表 12～21 中只考虑地球形状主要带谐项（J_2，J_3，J_4）摄动。

计算中采用的单步法是 RKF7(8)，多步法是 Adams 方法和 Adams-Cowell 方法，均为 10 阶，所有方法的积分步长取得相同：$h=T_0/100$，即每圈 100 步，这是为了各种方法之间的比较。

关于具体计算结果，在各表中列出了三个弧段（100 圈，1000 圈和 10000 圈）上的五个根数值，即 $a, e, i, \Omega, M+\omega$，$a$ 的单位是 km，四个角度的值是度及其小数。因为偏心率较小，单独列出 ω 值无意义，故未列出。而最能体现计算精度的量是沿迹根数 $M+\omega$，因此对每种（包括方法

和不同计算对象)结果,都分别在上述三个弧段上列出了沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$ 值,它的单位是弧度。表中方法类型(type)包括在单步法和多步法基础上采用前几节和本节的几种算法,对于 RKF7(8) 有:

RK1:基本变量是 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$,基本方程为(8.80)式;

RK2:基本变量是 $\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}}$,基本方程是(8.99);

RK3:仍用 $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$,但基本方程是采用(8.101)式,即 Encke 算法;

RK4:采用改进的 Encke 算法,基本方程是(8.107)~(8.108)式;

RK1H:在 RK1 算法基础上加能量控制,即能量补偿。

关于 Adams-Cowell 方法的几种算法,完全与上述单步法对应,即 AC1 与 RK1 对应,余类推。AD 表示 Adams 方法,但采用的基本变量是轨道根数 $a,e,i,\Omega,\varepsilon,E$,AD1 和 AD1H 与上类似,各表示一般算法和加能量控制的算法。所有多步法都采用了 PECE 算法,在校正计算(CE)中均迭代一次,事实上对我们的计算问题,迭代次数增多已无意义。

表 12　RKF7(8)方法(Lageos)　$(h=T_0/100)$

type	a	e	i	Ω	$M+\omega$
			$t-t_0=100(T_0)$		
RK	12255.	0.00	109.	50.	396.
	56791528	4084069985	8987975539	3875816354	4219672066
RK1	56791529	4084069985	8987975539	3875816354	4219671982
RK2	56791529	4084069986	8987975539	3875816354	4219672006
RK3	56791529	4084069986	8987975539	3875816354	4219672006
RK4	56791528	4084069985	8987975539	3875816354	4219672066
RK1H	56791528	4084069985	8987975539	3875816354	4219672061
			$t-t_0=1000(T_0)$		
RK	12254.	0.00	109.	98.	319.
	79465513	3688948923	8994200090	8824711858	1959479069
RK1	79465503	3688948917	8994200092	8824711856	1959471389
RK2	79465461	3688948886	8994200098	8824711842	1959431297
RK3	79465461	3688948886	8994200098	8824711842	1959431302
RK4	79465513	3688948923	8994200091	8824711858	1959479035
RK1H	79465513	3688948923	8994200091	8824711859	1959479016
			$t-t_0=10000(T_0)$		
RK	12249.	0.00	109.	223.	267.
	48484342	4740958325	9040067100	7437534483	2498514127
RK1	48484507	4740958526	9040067091	7437534124	2497749266
RK2	48484755	4740958863	9040067070	7437533394	2496448815
RK3	48484754	4740958861	9040067070	7437533397	2496453535
RK4	48484348	4740958332	9040067102	7437534485	2498489395
RK1H	48484342	4740958326	9040067102	7437534498	2498513615

表 13　Δ$(M+\omega)$

type	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
RK1	1.5E−10	1.4E−08	1.3E−06
RK2	1.0E−10	0.8E−07	3.6E−06
RK3	1.0E−10	0.8E−07	3.6E−06
RK4	1.0E−12	0.6E−10	4.3E−08
RK1H	0.9E−11	0.9E−10	0.9E−09

表 14　RKF7(8)方法(2^h 卫星)　$(h=T_0/100)$

type	a	e	i	Ω	$M+\omega$
			$t-t_0=100(T_0)$		
RK	8055.	0.09	49.	25.	428.
	46762199	9799154410	9903906208	9804466900	0905913285
RK1	46762200	9799154411	9903906208	9804466901	0905943094
RK2	46762199	9799154410	9903906208	9804466900	0905913301
RK3	46762199	9799154410	9903906208	9804466900	0905943301
RK4	46762199	9799154410	9903906208	9804466900	0905943286
RK1H	46762199	9799154411	9903906208	9804466900	0905943275
			$t-t_0=1000(T_0)$		
RK	8059.	0.09	50.	169.	590.
	68239688	8922981704	0071926037	8755481401	9592258158
RK1	68239742	8922981760	0071926049	8755481430	9592240258
RK2	68239730	8922981755	0071926042	8755481407	9592245732
RK3	68239730	8922981755	0071926042	8755481407	9592245785
RK4	68239692	8922981705	0071926038	8755481403	9592257021
RK1H	68239689	8922981711	0071926037	8755481396	9592258064
			$t-t_0=10000(T_0)$		
RK	8058.	0.09	50.	168.	419.
	05237205	8910759222	0023899915	7498565461	6512251213
RK1	05238882	8910757111	0023900503	7498567962	6510487300
RK2	05239918	8910755746	0023900870	7498569336	6509376083
RK3	05239920	8910755743	0023900871	7498569340	6509373912
RK4	05241018	8910754401	0023901205	7498571039	6508307573
RK1H	05237206	8910759301	0023899914	7498565050	6512250659

表 15　$\Delta(M+\omega)$

type	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
RK1	3.3E−10	3.1E−08	3.1E−06
RK2	2.8E−11	2.2E−08	5.0E−06
RK3	2.8E−11	2.2E−08	5.0E−06
RK4	1.7E−12	2.0E−09	6.9E−06
RK1H	1.7E−11	1.6E−10	1.0E−09

表 16　ADAMS,ADAMS-COWELL 方法　(Lageos　$h=T_0/100$)

type	a	e	i	Ω	$M+\omega$
			$t-t_0=100(T_0)$		
RK	12255.	0.00	109.	50.	396.
	56791528	4084069985	8987975539	3875816354	4219672066
AC1	56791527	4084069983	8987975539	3875816354	4219672197
AC2	56791528	4084069985	8987975539	3875816354	4219672053
AC3	56791528	4084069985	8987975539	3875816354	4219672053
AC4	56791528	4084069985	8987975539	3875816354	4219672085
AC1H	56791528	4084069983	8987975539	3875816354	4219672063
AD1	56791528	4084069991	8987975539	3875816354	4219672026
AD1H	56791528	4084069990	8987975539	3875816354	4219672074
			$t-t_0=1000(T_0)$		
RK	12254.	0.00	109.	98.	319.
	79465513	3688948923	8994200090	8824711858	1959479069
AC1	79465530	3688948915	8994200089	8824711863	1959493262
AC2	79465495	3688948861	8994200093	8824711853	1959463560
AC3	79465493	3688948859	8994200093	8824711852	1959461422
AC4	79465513	3688948924	8994200091	8824711858	1959479380
AC1H	79465513	3688948905	8994200090	8824711857	1959479031
AD1	79465507	3688948974	8994200091	8824711857	1959474273
AD1H	79465513	3688948977	8994200091	8824711859	1959479086
			$t-t_0=10000(T_0)$		
RK	12249.	0.00	109.	223.	267.
	48484342	4740958325	9040067100	7437534483	2498514127
AC1	48484043	4740957821	9040067122	7437535183	2499899653
AC2	48484152	4740957948	9040067112	7437534854	2499320221
AC3	48484164	4740957966	9040067111	7437534816	2499252461
AC4	48484341	4740958393	9040067102	7437534503	2498519362
AC1H	48484342	4740958187	9040067102	7437534481	2498513775
AD1	48484459	4740959013	9040067093	7437534246	2497973069
AD1H	48484343	4740958871	9040067101	7437534513	2498514154

表 17　$\Delta(M+\omega)$

type	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
AC1	2.3E−10	2.5E−08	2.4E−06
AC2	2.3E−11	2.7E−08	1.4E−06
AC3	2.3E−11	3.1E−08	1.5E−06
AC4	3.3E−11	5.4E−10	0.9E−08
AC1H	0.5E−11	0.7E−10	0.6E−09
AD1	0.7E−10	0.8E−08	0.9E−06
AD1H	1.4E−11	3.0E−11	4.7E−11

表 18　RKF7(8)方法　($h=T_0/100$)

type	a	e	i	Ω	$M+\omega$
			$t-t_0=100(T_0)$		
RK	12255.	0.	109.	50.	396.
	56791528	004084069985	8987975539	3875816354	4219672066
RK2	56791528	004084069985	8987975539	3875816354	4219672067
RK3	56791528	004084069985	8987975539	3875816354	4219672067
RK4	56791528	004084069985	8987975539	3875816354	4219672067
			$t-t_0=1000(T_0)$		
RK	12254.	0.	109.	98.	319.
	79465513	003688948923	8994200090	8824711858	1959479069
RK2	79465513	003688948923	8994200091	8824711859	1959479242
RK3	79465513	003688948923	8994200091	8824711859	1959479247
RK4	79465513	003688948923	8994200091	8824711855	1959479064
			$t-t_0=10000(T_0)$		
RK	12249.	0.	109.	223.	267.
	48484342	004740958325	9040067100	7437534483	2498514127
RK2	48484342	004740958324	9040067101	7437534496	2498515474
RK3	48484342	004740958324	9040067101	7437534495	2498515062
RK4	48484342	004740958325	9040067102	7437534491	2498513707

RK2:$\Delta r=0.01$;　RK3:$\Delta r=0.01$;　RK4:$\Delta r=0.001$

表 19　$\Delta(M+\omega)$

type	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
RK2	1.7E−12	3.0E−10	2.3E−09
RK3	1.7E−12	3.1E−10	1.6E−09
RK4	1.7E−12	0.9E−11	0.7E−09

表 20　Adams-Cowell 方法　($h=T_0/100$)

type	a	e	i	Ω	$M+\omega$
			$t-t_0=100(T_0)$		
RK	12255.	0.	109.	50.	396.
	56791528	004084069985	8987975539	3875816354	4219672066
AC2	56791529	004084069986	8987975539	3875816354	4219671985
AC3	56791529	004084069986	8987975539	3875816354	4219671985
AC4	56791528	004084069985	8987975539	3875816354	4219672084
			$t-t_0-1000(T_0)$		
RK	12254.	0.	109.	98.	319.
	79465513	003688948923	8994200090	8824711858	1959479069
AC2	79465509	003688948926	8994200091	8824711858	1959476064
AC3	79465510	003688948926	8994200091	8824711858	1959476142
AC4	79465513	003688948924	8994200091	8824711858	1959478977
			$t-t_0=10000(T_0)$		
RK	12249.	0.	109.	223.	267.
	48484342	004740958325	9040067100	7437534483	2498514127
AC2	48484372	004740958379	9040067100	7437534421	2498355206
AC3	48484372	004740958379	9040067100	7437534422	2498355829
AC4	48484337	004740958322	9040067102	7437534513	2498334452

AC2：$\Delta r-0.03$；　AC3：$\Delta r=0.03$；　AC4：$\Delta r-0.003$

表 21　$\Delta(M+\omega)$

type	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
AC2	1.4E−10	0.5E−08	2.8E−07
AC3	1.4E−10	0.5E−08	2.8E−07
AC4	3.1E−11	1.6E−10	3.5E−08

在反应计算结果的表中，各弧段第一栏 RK 的值是所有算法的比对标准。经多种检验证实，在 $10000T_0$(即 10000 圈)的长弧段上，其可靠程度为 10^{-11}，因此上述比对是完全可靠的。

表 12～表 17 中 RK1，RK2，RK3 和 AC1，AC2，AC3 的结果清楚地表明，对于长弧计算，通过计算摄动坐标和速度 $\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}}$ 给出所需结果，并未达到提高精度的目的，与直接计算 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$ 的结果几乎一致。而采用 $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 作为基本变量时，是否采用 Encke 变换没有差别，这就证实了前面 8.6 中的分析。改进的 Encke 方法(RK4 和 AC4)显然效果要好些，特别在短弧段上。但几种算法都不能改变传统数值方法所特有的人工耗散效应，相应的沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$ 的增长速度快，几乎按 $(t-t_0)^2$ 增长。为此，对用 $\boldsymbol{u}$ 和 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 作为基本变量的三种算法，按 $\Delta r=|\boldsymbol{u}|$ 的大小，采用逐段校正参考轨道的措施，以改善 $\Delta(M+\omega)$ 的增长状况[16]。表 18～表 21 中即列出对 Lageos 卫星的计算结果，在表 18 和表 20 中的底部，列出了相应的 Δr 值，例如 RK2，当 Δr 达到 0.01 时；AC2，当 Δr 达到 0.03 时，即校正参考轨道，重新初始化，这样使 $\boldsymbol{u}$ 的模一直保持在较小的状况。结果优于前面不校正参考轨道的计算效果，但仍有人工耗散，尽管整个计算精度有提高，沿迹误差的增长速度却越来越快，弧段再长些，该误差将明显增大，特别是多步法，频繁地初始

化是不利的，其结果不如单步法。

上述各种结果清楚地表明，在长弧计算中，若引用原有各种数值方法，确实有必要采用能量补偿的措施。而表 12～表 17 中，RK1H 和 AC1H 的结果，完全证实了这种补偿算法的良好效果。由于能量耗散有了补偿，轨道半长径 a 的精度提高，使相应的沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$ 仅随 $(t-t_0)$ 线性增长，因此沿迹根数 $(M+\omega)$ 以及整个计算精度随之明显提高。

关于采用轨道根数作为基本变量的情况，在表 16～表 17 中已有明确反映；AD1 和 AC1 同为 10 阶算法，若用 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 作为基本变量，后者的精度要比前者高，但现在 AD1 中采用了轨道根数作为基本变量，情况有了明显的变化，AD1 的精度超过了 AC1，而且加能量补偿后（对应 AD1H），精度又有明显地提高，沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$ 的增长速度不仅受到了控制，而且随 $(t-t_0)$ 的增长速度更加缓慢。因此，当存在多种摄动因素时，用 8.4 中提出的方法，即采用轨道根数作为基本变量，方程的形式稍加改变（见公式(8.86)），效果还是明显的，总的计算效率（包括精度和耗费的机时）将会提高。

最后，为了证实能量控制技术可适用于多种背景，包括非定常保守力摄动和耗散力摄动，表 22～表 24 即给出这类计算结果。计算中除考虑了地球形状主要带谐项 (J_2, J_3, J_4) 摄动外，还有主要田谐项 $(J_{2,2})$ 摄动，日、月摄动和光压摄动，这些摄动加速度均显含 t，同时也加入了耗散型的大气阻力摄动。光压摄动加速度和大气阻力摄动加速度相对中心引力加速度的量级分别为 10^{-7} 和 10^{-9}，因此，上述增加的各种摄动项均比 J_2 摄动项小得多，它们的量级不超过 J_2^2，即满足前面提出的条件。

表 22　能量方法(Lageos　$h=T_0/100$)

type	a	e	i	Ω	$M+\omega$
			$t-t_0=100(T_0)$		
RK	12255.	0.00	109.	50.	396.
	52478258	3999004261	8948279806	3863763416	5369353693
RK1	52478258	3999004261	8948278064	3863763416	5369353608
RK1H	52478258	3999004261	8948279806	3863763416	5369353679
AC1	52478257	3999004259	8948279806	3863763416	5369353832
AC1H	52478258	3999004259	8948279806	3863763416	5369353682
			$t-t_0=1000(T_0)$		
RK	12255.	0.00	109.	98.	323.
	26452729	3264114479	9051319238	9083913805	1101499179
RK1	26452720	3264114475	9051319239	9083913803	1101491454
RK1H	26452728	3264114478	9051319238	9083913805	1101499071
AC1	26452745	3264114483	9051319236	9083913810	1101513307
AC1H	26452728	3264114477	9051319238	9083913804	1101499119
			$t-t_0=10000(T_0)$		
RK	12252.	0.00	109.	224.	224.
	83642431	6347842531	8792661117	0141751452	0619953207
RK1	83643700	6347841556	8792661012	0141751209	0619188196
RK1H	83642433	6347842537	8792661118	0141751467	0619952344
AC1	83639998	6347844020	8792661323	0141751965	0621419321
AC1H	83642433	6347842137	8792661119	0141751444	0619951731

表 23　$\Delta(M+\omega)$

type	order	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
RK1	7(8)	1.5E-10	1.3E-08	1.3E-06
RK1H	7(8)	2.4E-11	1.9E-10	1.5E-09
AC1	10	2.4E-10	2.5E-08	2.6E-06
AC1H	10	1.9E-11	1.0E-10	2.6E-09

表 24　$\Delta H(t)$

type	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
RK1H	1.0E-14	1.0E-14	5.0E-14
AC1H	1.0E-14	1.0E-14	3.0E-14

表 22 中算法 RK1,RK1H,AC1,AC1H 与表 12、表 16 中的含义相同,表 23 清楚地表明,沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$的增长状况同前,这更加证实了能量补偿方法的实际效果。表 24 列出了能量误差 $\Delta H(t)$的状况,误差确实很小,与前面的分析相符,这是在非定常 Hamilton 系统中,能量补偿方法仍旧有效的保证。

尽管上述算例是以人造地球卫星为背景给出的,但能量补偿方法的应用并不局限于此,对其它类型的力学系统,即使是耗散系统,只要满足前面提出的条件都是有效的,这一条件可写成下列形式:

$$\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right| \ll \left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right| \tag{8.138}$$

即该系统能量的变化率明显地小于所讨论的运动天体的轨道根数变化率,相应的能量 h 的计算精度明显地高于根数(或位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$)的计算精度。

这一方法利用了能量积分(或能量关系式)的特点,通过对半径 a 的校正达到能量补偿的目的,它不仅改善了各种数值方法在积分过程中的局部截断误差,同时也吸收了部分舍入误差,在定量计算上确实有其特点,它能有效地控制沿迹误差的快速增长,起到数值稳定化的作用。但是,从定性角度来看,在各种数值方法中引用这种能量控制技术,仍不能保持系统(或天体运动)的整体特征。要解决这一问题,必须改变传统的数值方法,例如对 Hamilton 系统,要根据该系统的固有性质,构造出相应的差分格式,下一章就是专门介绍这类方法。

参考文献

[1]南京大学数学系计算数学专业编,常微分方程数值解法,科学出版社,1979年。

[2]P.亨利西著,包雪松等译,常微分方程离散变量方法,科学出版社,1985年。

[3]Fehlberg,E.,*NASA TR R* 287(1968).

[4]Cowell,P. H.,Crommelin,A. C. D.,*Appendix to Greenwich Observations for* 1909,Edinburgh(1910),84.

[5]Shampine,L. and Gordon,M.,*Computer Solution of Ordinary Differential Equations,The Initial Value Problem*,W. H. Freeman and Company,San Francisco,1975.

[6]Lambert,J. D. and Watson,I. A.,*J. Inst. Maths Applics*,18(1976),189.

[7]Quinlan,G. D. and Tremaine,S.,*Astron. J.*,100(1990),1694.

[8]Quinlan,G. D. and Tramaine,S.,*Astron. J.* 99(1990),1016.

[9]Szebehely,V.,*Theory of Orbits*,1967,Academic Press,N. Y.

[10]Stiefel,E. L. and Scheifele,G.,*Linear and Regular Celestial Mechanics*,1970,Springer-Verlag Berlin,Heidelberg,New York.

[11]Velez,C. E. and Hilinski,S.,*Celest. Mech.*,17(1978),83.

[12]刘林,廖新浩,天文学报,38(1997),75.

[13]Brouwer,D. and Clemence,G. M.,*Methods of Celestial Mechanics*,Academic Press,New York and London(1961).

[14]Kyner,W. T.,Bennett,*M. M.*,*Astron. J.*,71(1966),579.

[15]Escobal,P. R.,*Method of Orbit Determination*,Krieger Publishing Company,Huntington,New York,1976.

[16]刘林,胡松杰,天文学报,37(1996),285.

[17]黄天衣,丁华,天文学报,22(1981),328。

[18]刘林,廖新浩,天文学报,28(1987),215。

[19]刘林,廖新浩,天文学报,34(1993),411。

[20]Lin Liu and Xinhao Liao,*Celest. Mech.* 59(1994),221.

第九章　Hamilton 系统的计算方法

上一章最后一节介绍的能量补偿算法，只是从运动性质的一个方面，通过对轨道半长径 a 的校正达到补偿能量人工耗散的目的，从定量角度来看，它改善了局部截断误差，以此解决了沿迹误差快速增长的问题，基本上将 $\Delta(M+\omega)$ 控制在随 $(t-t_0)$ 线性增长的程度，整个计算精度有明显提高。但是，除该方法需要满足一定条件外，对 Hamilton 系统而言，从定性角度来看，它并没有彻底解决原有数值方法固有的人工耗散问题，在长时间演化跟踪计算中，仍旧不能保持 Hamilton 流的整体性质。而动力天文中所遇到的力学系统，几乎都是 Hamilton 系统，或带有小耗散的拟 Hamilton 系统。在当今研究这些系统的长期演化性质（特别是一些带有本质性的非线性现象）时，由于数学上的困难，往往借助于数值探索来提供一些全局图像和重要"信息"，以供进一步的理论研究，甚至"依赖"数值结果得出某些重要结论。因此，这就涉及到所引用算法的可靠性，即它们给出的数值结果是否正确地反映了系统的整体特征，一些非线性现象是系统固有的，还是"计算机现象"？这是动力天文定性研究中的一个极其重要的问题。事实上，有些结果确实是计算机现象，它歪曲了被研究的力学系统的长期演化特征，本章后面附有具体算例。因此，算法问题是有待认真而深入研究的重大课题。近年来有关 Hamilton 系统的辛算法（Symplectic Algorithm），就是针对这类问题提出的，这一章专门介绍该算法及其在动力天文中的应用情况。

以辛几何为理论框架的辛算法是近年来发展起来的一种新的 Hamilton 系统的数值积分方法[1~14]，其差分格式精确地反映了 Hamilton 相流最重要的几何特征，即辛结构的保持，而辛结构是 Hamilton 流的一种整体结构。这一结构能否保持，往往决定了长期演化计算的有效与否。在辛算法出现以前，动力天文中关于一些长期演化性态的研究，所采用的各种数值方法，都因其局部截断误差导致人工耗散而不能保持辛结构，从而引进一些非 Hamilton 相流的特征，甚至完全歪曲了运动性质。因此，在动力天文研究中，辛算法的引用势在必行。

9.1　辛算法简介

关于 Hamilton 力学的一些基本知识，在前面第七章中已有陈述。对于 Hamilton 系统的动力学问题，引用相应的共轭对称形式的方程——Hamilton 运动方程是极其有利的，因它在数学上具有独特的性质。一个具有 n 个自由度的 Hamilton 运动方程，可写成下列形式：

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\qquad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p} \tag{9.1}$$

$$H=H(p,q) \tag{9.2}$$

其中广义动量 p 和广义坐标 q 皆为 n 维向量，即

$$p=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_n\end{pmatrix},\qquad q=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix} \tag{9.3}$$

H 是 Hamilton 函数，如果显含自变量 t，总可用正则扩充的方法使其转化为不显含自变量的情况。若记

$$x=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \tag{9.4}$$

则方程(9.1)可简写为

$$\dot{x}=I\mathrm{d}H(x) \tag{9.5}$$

$$I=\begin{pmatrix}0 & -E_n\\E_n & 0\end{pmatrix} \tag{9.6}$$

E_n 是 $n\times n$ 阶单位阵，有

$$I\mathrm{d}H(x)=\begin{pmatrix}0 & -E_n\\E_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial H/\partial p\\\partial H/\partial q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\partial H/\partial q\\\partial H/\partial p\end{pmatrix} \tag{9.7}$$

单参数微分同胚群 $g^t:R^{2n}\to R^{2n}$ 构成系统(9.5)的相流，即初值问题：

$$\dot{x}=I\mathrm{d}H(x),\qquad x(0)=x_0 \tag{9.8}$$

的解可表示为：

$$x(t)=g^tx(0) \tag{9.9}$$

偶次微分流形上的辛结构是一个闭的、非退化的微分 2 形式 ω^2，在相空间 $R^{2n}=\{(x)\}=\{(p,q)\}$ 中，ω^2 可以表示为[5],[6]

$$\omega^2=\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q \tag{9.10}$$

设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\xi_{n+1},\cdots,\xi_{2n})^T,\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\eta_{n+1},\cdots,\eta_{2n})^T$ 为切向量，即

$$\xi_i=\mathrm{d}x_i(\xi),\qquad \eta_i=\mathrm{d}x_i(\eta),\qquad i=1,2,\cdots,2n \tag{9.11}$$

按外积"$\wedge$"定义，有

$$\omega^2(\xi,\eta)=\langle\xi,J\eta\rangle=\xi^TJ\eta \tag{9.12}$$

其中

$$J=I^{-1}=I^T=\begin{pmatrix}0 & E_n\\-E_n & 0\end{pmatrix} \tag{9.13}$$

T 表示转置，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 R^{2n} 中的标准内积。

Hamilton 相流的一个重要性质，即保持辛结构[5]：

$$(g^t)^*\omega^2(\xi,\eta)=\omega^2(\xi,\eta) \tag{9.14}$$

其中 $(g^t)^*$ 是由 g^t 诱导出的拉回(Pull back)映射。根据拉回映射的定义[5]，有

$$(g^t)^*\omega^2(\xi,\eta)=\omega^2((g^t)_*\xi,(g^t)_*\eta) \tag{9.15}$$

$(g^t)_*$ 是由 g^t 诱导出的切映射[6]。

为了判别一个数值方法相应的差分格式是否保持辛结构，下面给出一个等价条件。若记 $f:R^{2n}\to R^{2n}$ 为可微映射，满足 $f:x\in R^{2n}\to f(x)\in R^{2n}$，$f^*$ 和 f_* 各为映射 f 诱导的拉回映射和切

映射，对于后者，可用 Jacobi 矩阵表示：

$$f_* = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \tag{9.16}$$

根据拉回映射的定义，有

$$f^* \omega^2(\xi, \eta) = \omega^2(f_* \xi, f_* \eta) \tag{9.17}$$

再利用 R^{2n}中辛结构的表达式(9.12)及保持辛结构的条件(9.14)，可得

$$f^* \omega^2(\xi, \eta) = (f_* \xi)^T J (f_* \eta) = \xi^T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T J \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] \eta = \xi^T J \eta$$

由此立即给出

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T J \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = J \tag{9.18}$$

满足这一条件的映射 f 称为辛映射，相应的矩阵 $S = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$称为辛矩阵。

根据上述等价条件不难看出，保持辛结构的条件(9.14)应是保持 Hamilton 流的条件，辛映射 f 将 Hamilton 流映射成 Hamilton 流。条件(9.18)类似于分析力学中正则变换（即辛变换）的条件，不同之处是条件(9.18)实为正则变换的"演化"，而且在表达形式上，相应于正则变换的变换乘子 $\mu=1$。由(9.18)还可导出一些便于判别 f 是辛映射的类似于正则变换的等价条件，如泊松括号形式、生成函数等。辛算法的差分格式就是按上述条件构造的，由 $x_k(k=0,1,2,\cdots)$计算 x_{k+1}的单步法的显式差分格式实为

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{9.19}$$

若

$$S = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

满足条件(9.18)，则该差分格式即为保辛的。

辛映射具有群性质，即若 $f_i(i=1,2,\cdots,m)$是辛映射，则其复合映射 f：

$$f = f_m \circ f_{m-1} \circ \cdots \circ f_1 \tag{9.20}$$

亦是辛映射。因此，可根据这一性质，由低阶辛算法用复合的方式构造高阶辛算法。

9.2 可分离 Hamilton 系统的辛算法

在动力天文中，Hamilton 系统常可写成分离形式，即

$$H(p,q) = T(p) + V(q) \tag{9.21}$$

相应的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial T}{\partial p} = \Phi(p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial V}{\partial q} = \Psi(q) \end{aligned}\right\} \tag{9.22}$$

q 和 p 分别采用 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 是最简单的。对于这一系统，常用的 Euler 中点格式（隐格式）：

$$\left.\begin{aligned} & q_k = q_{k-1} + h\Phi(\bar{p}) \\ & p_k = p_{k-1} + h\Psi(\bar{q}) \\ & \bar{p} = (p_{k-1} + p_k)/2, \quad \bar{q} = (q_{k-1} + q_k)/2 \end{aligned}\right\} \tag{9.23}$$

就是保辛的，即

$$S=\frac{\partial(q_k,p_k)}{\partial(q_{k-1},p_{k-1})}$$

是辛矩阵，满足条件(9.18)，其中 h 是积分步长。要构造相应的显式辛差分格式也是容易的。显然，下列算法：

$$q_k=q_{k-1}+h\Phi(\bar{p}),\qquad \bar{p}=\text{const} \tag{9.24}$$

$$p_k=p_{k-1}+h\Psi(\bar{q}),\qquad \bar{q}=\text{const} \tag{9.25}$$

分别对应 Euler 流(时间 t 的线性函数)E_Φ^h 和 E_Ψ^h，都是辛格式，它们的复合即构成一阶辛格式：

$$(g^h)_1=E_\Psi^h\circ E_\Phi^h=E_\Phi^h\circ E_\Psi^h \tag{9.26}$$

再用复合的办法，可构造 m 阶辛格式：

$$\begin{cases}q^1=q^0+hc_1\Phi(p^0)\\ p^1=p^0+hd_1\Psi(q^1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}q^2=q^1+hc_2\Phi(p^1)\\ p^2=p^1+hd_2\Psi(q^2)\end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{cases}q^m=q^{m-1}+hc_m\Phi(p^{m-1})\\ p^m=p^{m-1}+hd_m\Psi(q^m)\end{cases}$$

若记

$$\left.\begin{aligned}&q^0=q_{k-1}\ ,\quad p^0=p_{k-1}\\ &q^m=q_k\ ,\quad p^m=p_k\\ &k=1,2,\cdots,m\end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

则上列复合可写成下列求和形式：

$$\left.\begin{aligned}&q_k=q_{k-1}+h\sum_{i=1}^{m}c_i\Phi(p^{i-1})\\ &p_k=p_{k-1}+h\sum_{i=1}^{m}d_i\Psi(q^i)\\ &k=1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{9.28}$$

这是由 t_{k-1},q_{k-1},p_{k-1} 到 t_k,q_k,p_k 的计算公式，$h=t_k-t_{k-1}$ 是积分步长，c_i 和 $d_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为待选参数，而 $\Phi(p^{i-1})$ 和 $\Psi(q^i)$ 中的 p^{i-1} 和 q^i 的计算公式.即

$$\left.\begin{aligned}&q^i=q^{i-1}+hc_i\Phi(p^{i-1})\\ &p^i=p^{i-1}+hd_i\Psi(q^i)\\ &q^0=q_{k-1}\ ,\quad p^0=p_{k-1}\end{aligned}\right\} \tag{9.29}$$

关于待选参数 c_i 和 d_i 的选择，可用类似于 Runge-Kutta 方法确定，亦可用算法合成的方法[7]，由低阶到高阶来确定，相应的公式如下：

一阶格式 $(g^h)_1=E_\Psi^h\circ E_\Phi^h=E_\Phi^h\circ E_\Psi^h$ (9.30)

二阶格式 $\left.\begin{aligned}&(g^h)_2=(g^{h/2})_1\circ(\check{g}^{h/2})_1=E_\Psi^{h/2}\circ E_\Phi^h\circ E_\Psi^{h/2}=E_\Phi^{h/2}\circ E_\Psi^h\circ E_\Phi^{h/2}\\ &(\check{g}^{h/2})_1=E_\Phi^{h/2}\circ E_\Psi^{h/2}=E_\Psi^{h/2}\circ E_\Phi^{h/2}\end{aligned}\right\}$ (9.31)

$2(l+1)$阶格式，$l=1,2\cdots$ $\quad (g^h)_{2(l-1)}=(g^{\alpha h})_{2l}\circ(g^{\beta h})_{2l}\circ(g^{\alpha h})_{2l}$ (9.32)

其中

$$\alpha=\frac{1}{2-2^{1/(2l+1)}},\qquad \beta=-\frac{2^{1/(2l+1)}}{2-2^{1/(2l-1)}} \tag{9.33}$$

按上述公式，具体给出一阶(SI1)、二阶(SI2)、四阶(SI4)、六阶(SI6)和八阶(SI8)的各组参数值如下：

$$\text{SI1:}\qquad c_1=1\ ,\quad d_1=1 \tag{9.34}$$

$$\text{SI2:}\qquad c_1=c_2=\frac{1}{2}\ ,\quad d_1=1,\quad d_2=0 \tag{9.35}$$

$$\text{SI4:}\qquad \left.\begin{aligned} &c_1=c_4=\frac{1}{2(2-\alpha_0)}\ ,\quad c_2=c_3=\frac{1-\alpha_0}{2(2-\alpha_0)} \\ &d_1=d_3=\frac{1}{2-\alpha_0}\ ,\quad d_2=-\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\ ,\quad d_4=0 \\ &\alpha_0=2^{1/3} \end{aligned}\right\} \tag{9.36}$$

关于 SI6 和 SI8，本章参考文献[4]中按不同的复合方式，分别给出了三组和八组参数值，根据原文的编号，表 1 中列出其较好的几组参数值。

表 1　SI6 和 SI8 的几组参数值 W_m

	SI6A	SI8C	SI8D
W_1	0.117767998417887E1	0.311790812418427E0	0.102799849391985E0
W_2	0.235573213359357E0	−0.155946803821447E1	−0.196061023297549E1
W_3	0.784513610477560E0	−0.167896928259640E1	0.193813913762276E1
W_4		0.166335809963315E1	−0.158240635368243E0
W_5		−0.106458714789183E1	−0.144485223686048E1
W_6		0.136934946416871E1	0.253693336566229E0
W_7		0.629030650210433E0	0.914844246229740E0

相应的 c_i 和 d_i 值如下：

$$\left.\begin{aligned} &c_1=c_{2m+2}=\frac{1}{2}W_m \\ &c_2=c_{2m+1}=\frac{1}{2}(W_m+W_{m-1}) \\ &\cdots\cdots \\ &c_{m+1}=c_{m+2}=\frac{1}{2}(W_1+W_0) \\ &d_1=d_{2m+1}=W_m \\ &d_2=d_{2m}=W_{m-1} \\ &\cdots\cdots \\ &d_m=d_{m+2}=W_1 \\ &d_{m+1}=W_0 \end{aligned}\right\} \tag{9.37}$$

其中

$$W_0=1-2(W_1+W_2+\cdots+W_m) \tag{9.38}$$

对于 SI6 和 SI8，m 分别取 3 和 7。

对于显辛格式(9.28)，计算右函数的次数取决于 d_i，由上述 d_i 值可知，一阶格式算 1 次，二阶亦只算 1 次，四阶算 3 次，六阶算 7 次，八阶则算 15 次。

9.3　保辛的 Runge-Kutta 方法

对于 Hamilton 系统：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{z}=J^{-1}H_z\\&z=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix},\quad H=H(z)=H(p,q)\end{aligned}\right\}\tag{9.39}$$

若记

$$f(z)=J^{-1}H_z\tag{9.40}$$

由 t_k, z_k 到 t_{k+1}, z_{k+1} 的 RK 方法的差分格式为

$$\left.\begin{aligned}&z_{k+1}=z_k+h\sum_{i=1}^{m}b_i f(y^i)\\&y^i=z_k+h\sum_{j=1}^{m}a_{ij}f(y^j)\\&1\leqslant i\leqslant m\end{aligned}\right\}\tag{9.41}$$

在 8.2 中已有说明，当 $a_{ij}(i\leqslant j)\neq0$，为隐格式，而当 $a_{ij}(i<j)=0, a_{ii}\neq0$，则为对角隐格式，只有当 $a_{ij}(i\leqslant j)=0$ 时才是显格式。保辛的充要条件：

$$\left(\frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_k}\right)^T J\left(\frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_k}\right)=J$$

等价于[8]

$$b_ib_j-b_ia_{ij}-b_ja_{ji}=0\tag{9.42}$$

对于一定阶的显格式，应有 $a_{ij}(i\leqslant j)=0$，那么条件(9.42)变为

$$b_ib_j-b_ja_{ji}=0\quad(i\leqslant j)$$

即

$$b_i=a_{ji}=0\quad(i=1,2,\cdots,i\leqslant j)$$

由于导致

$$b_s=a_{ss}=0\quad(s=1,2,\cdots)$$

因此无法构成上述要求的一定阶的显格式。若要 RK 方法保辛，至少是对角隐格式，这给具体计算带来很大的麻烦，每计算一个 y^i，都要经过迭代。

尽管显辛格式的 RK 算法不能构成，但可构造显式保辛的 Runge-Kutta-Nyström 算法(记为 SRKN)，Hamilton 系统(9.39)可直接用二阶方程来表达，即

$$\ddot{q}=f(q)\tag{9.43}$$

显式保辛的 SRKN 算法的差分格式是可以构成的，即[9]

$$\left.\begin{aligned}&q_{k+1}=q_k+h\dot{q}_k+h^2\sum_{i=1}^{m}\bar{b}_i f(q^i)\\&\dot{q}_{k+1}=\dot{q}_k+h\sum_{i=1}^{m}b_i f(q^i)\\&q^i=q_k+c_ih\dot{q}_k+h^2\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}f(q^j)\end{aligned}\right\}\tag{9.44}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}\bar{b}_i=b_i(1-c_i)\\ a_{ij}=b_i(c_i-c_j)\\ 1\leqslant i\leqslant m\end{array}\right\} \tag{9.45}$$

本章参考文献[9]给出了两组 3 步($m=3$)四阶显格式的系数，见表 2。

表 2　SRKN4

	i	1	2	3
Ⅰ	b_i	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$
	c_i	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$
Ⅱ	b_i	$\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$
	c_i	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

本章参考文献[10]给出了 5 步五阶和 7 步六阶 SRKN 算法的多组显格式系数，这里分别列出较好的一组，见表 3 和表 4。

表 3　SRKN5

i	b_i	c_i
1	0.22116193442304318371	0.77070344943964384788
2	1.00218471520824358210	0.24564166478369156146
3	0.20420286893132705664	0.87295101556613376423
4	−0.82437756359570176260	0.13352418017440445514
5	0.39682804503308794011	0.03827009985475860872

表 4　SRKN6

b_4	0.17870556351604306204	c_4	0.00000000000000000000
$b_5=b_3$	−0.70725865603123129122	$c_5=1-c_3$	0.19372673677147641095
$b_6=b_2$	0.52154603876818645804	$c_6=1-c_2$	0.12281363909397727225
$b_7=b_1$	0.59665983550502330216	$c_7=1-c_1$	0.73810405290506590652

9.4　辛算法在动力天文中的应用

首先用几个简单的运动模型来证实辛算法的优点。

1. Kepler 运动　对于一个大偏心率($e=0.7$)的平面椭圆运动，分别用 RK4 和 SI4 计算、

结果绘在同一张图上，见图 9.1，其中 RK4 的结果是缩小的图。两种方法的步长均取为每圈 150 步，图中绘出了第 300 圈后的 5 圈的状况。显然由于 RK 方法存在人工耗散，椭圆不断缩小，最终导致计算失效；而 SI4 的结果却不然，由于保辛性质，椭圆的整体特征完好，大小、形状几乎不变，其计算误差仅表现在拱线转动上。如果积分步长缩小或算法阶数增高，这一转动将不再明显，见图 9.2，采用的是六阶辛算法 SI6，其它计算条件同 SI4，图中也是第 300 圈后的 5 圈状况，椭圆几乎完全不变。

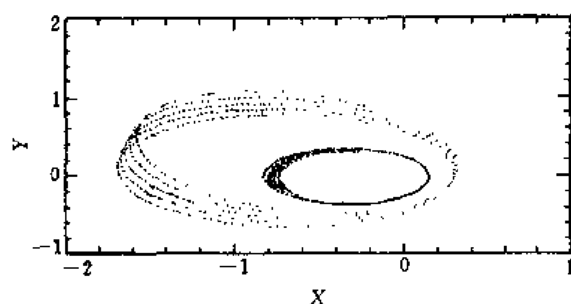


图 9.1 RK4 和 SI4 的结果

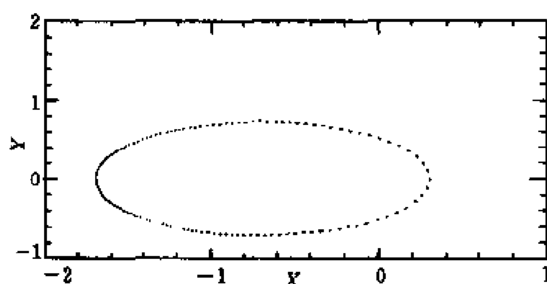


图 9.2 SI6 的结果

2. 两个不动中心问题　这一模型在第一章中已提出过，是一可积系统。同样分别采用 RK4 和 SI4 进行计算，两种算法的能量误差 ΔH 大不相同，前者有人工耗散，ΔH 随 t 增长，而后者无人工耗散，真实能量虽不能保持，但其误差呈现周期性。结果见图 9.3 和 9.4，图中 t 的单位是年。

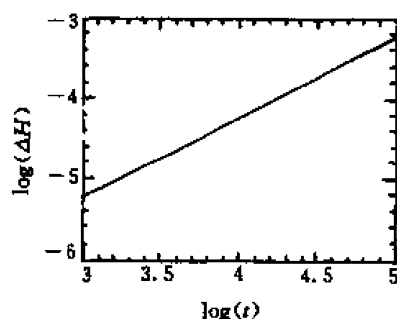


图 9.3 RK4 的结果

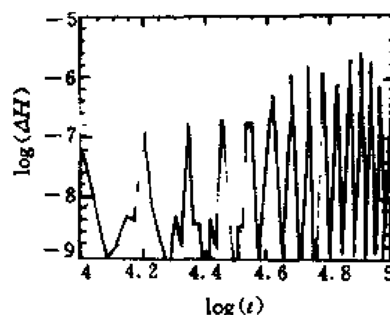


图 9.4 SI4 的结果

3. 简谐振子　取一个自由度的谐振子模型：

$$H=\frac{1}{2}(p^2+q^2) \tag{9.46}$$

这一模型与动力天文中的理想共振模型有着紧密联系。分别用 RK4 和 SI4 计算，步长均取 $h=0.5$，相空间的结构大不相同。RK4 算到 $t=10^5$ 就呈现为一吸引子，这是人工耗散（能量耗损）的结果；而 SI4 算到 $t=10^6$ 仍为一闭轨，完全保持了谐振子的整体结构。上述结果见图 9.5 和 9.6。

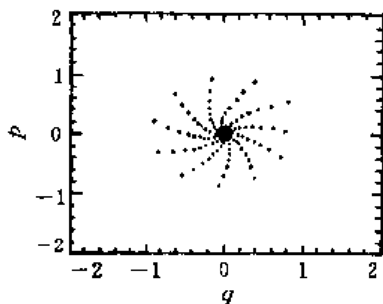


图 9.5　RK4 得到的相空间结构

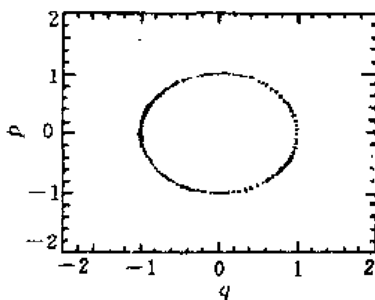


图 9.6　SI4 得到的相空间结构

上面三个简单的例子，足以说明辛算法的优越性，下面再从定量计算方面说明辛算法亦有其优点。

4. RK，SI 和 SRKN 三种算法在天体轨道变化的定量计算中沿迹误差增长的差别　仍以轨道变化迅速的人造地球卫星作为背景，具体计算 Lageos 卫星，初值选取与 8.3 中的相同，即

$$t_0=0\ ,\ T=225^m.0\ ,\ e=0.004\ ,\ i=109^\circ.9\ ,\ \Omega=50^\circ.0\ ,\ \omega=50^\circ.0\ ,\ M=0^\circ.0$$

考虑地球形状主要带谐项（J_2,J_3,J_4）摄动，三种算法的计算结果列于表 5，沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$ 列于表 6，相应的无摄运动的沿迹误差 $\Delta(M+\omega)_0$ 列于表 7。表中各量的意义与 8.7 中各量的意义相同。表 5 中 RK 这一栏的数值仍为比对标准，表 6 和表 7 中 T_0/h 的数值是每圈的积分步数，例如 1000，即表示每圈取 1000 步。

从表中列出的结果可以清楚地看出，由于人工耗散，致使 RK 方法的沿迹误差随 $(t-t_0)^2$ 增长；而两种辛算法 SRKN 和 SI 均因有保辛的特点，能量误差不随 $(t-t_0)$ 增长，致使沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$ 仅随 $(t-t_0)$ 线性增长。另外，解二阶方程组的辛算法 SRKN 比同阶的解一阶方程组的辛算法 SI 在精度上高一个量级，这也是正常的，因前者的截断误差比后者高一阶（对积分步长而言）。既然辛算法有这样的优点，因此，在长弧（或者较长的弧段）定轨计算中亦有应用前景。

辛算法在动力天文中的应用，除上述几个例子外，还可见本章参考文献[11]～[13]。但从定量计算结果（见表 6 和表 7）的比较来看，辛算法与同阶 RK 方法相比，局部截断误差较大，只是误差累积（主要表现在沿迹方向上）慢。如何减小辛算法的局部截断误差，本章参考文献[11]，[14]和[15]中作过一些探讨，并给出了相应的辛差分格式，计算精度确有提高。下一节将参照本章参考文献[14]的内容，介绍一种改进的显式辛算法。

表 5　计算结果(RK　SRKN　SI)

type	a	e	i	Ω	$M-\omega$
			$t-t_0=100(T_0)$		
RK	12255.	0.	109.	50.	396.
	56791528	004084069985	8987975539	3875816354	4219672066
RK4	56791535	004084070000	8987975537	3875816351	4219658962
SRKN4	56791598	004084070023	8987975533	3875816341	4219628203
SI4	56792261	004084070441	8987975477	3875816208	4219215668
RK5	56791525	004084069985	8987975539	3875816354	4219672591
SRKN5	56791530	004084069985	8987975539	3875816354	4219671119
RK6	56791527	004084069985	8987975539	3875816354	4219672265
SRKN6	56791532	004084069988	8987975538	3875816353	4219669533
SI6	56791570	004084070008	8987975535	3875816345	4219645771
			$t-t_0=1000(T_0)$		
RK	12254.	0.	109.	98.	319.
	79465513	003688948923	8994200090	8824711858	1959479069
RK4	79471319	003688952341	8994199425	8824713446	1964215790
SRKN4	79464787	003688948539	8994200152	8824711723	1959040774
SI4	79457943	003688945186	8994200728	8824710312	1954915813
RK5	79465568	003688948956	8994200084	8824711874	1959524473
SRKN5	79465424	003688948848	8994200098	8824711845	1959425508
RK6	79465536	003688948923	8994200088	8824711865	1959498366
SRKN6	79465470	003688948901	8994200094	8824711850	1959453402
SI6	79465077	003688948688	8994200127	8824711766	1959216057
			$t-t_0=10000(T_0)$		
RK	12249.	0.	109.	223.	267.
	48484342	004740958325	9040067100	7437534483	2498514127
RK4	48385229	004740838097	9040073608	7437763455	2960184873
SRKN4	48485065	004740954732	9040067037	7437532438	2494131629
SI4	48481951	004740935731	9040066435	7437511642	2452903235
RK5	48483380	004740957143	9040067165	7437536709	2502968419
SRKN5	48484428	004740957435	9040067094	7437534281	2497973918
RK6	48483925	004740957772	9040067129	7437535456	2500441746
SRKN6	48484384	004740958162	9040067098	7437534371	2498260916
SI6	48484770	004740956080	9040067063	7437533166	2495905750

表 6　$\Delta(M+\omega)$

type	order	T_0/h	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
RK	4	1000	1.0E-07	0.8E-05	0.8E-03
SRKN	4	1000	0.8E-07	0.8E-06	0.8E-05
SI	4	1000	0.8E-06	0.8E-05	0.8E-04
RK	5(6)	300	0.9E-09	0.8E-07	0.8E-05
SRKN	5	300	0.9E-08	0.9E-07	0.9E-06
RK	6(7)	200	3.5E-10	3.3E-08	3.4E-06
SRKN	6	200	4.4E-09	4.5E-08	4.4E-07
SI6	6	200	4.6E-08	4.6E-07	4.6E-06

表 7　$\Delta(M+\omega)_0$

type	order	T_0/h	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
RK	4	1000	1.0E-07	0.8E-05	0.9E-03
SRKN	4	1000	0.8E-07	0.8E-06	0.8E-05
SI	4	1000	0.8E-06	0.8E-05	0.8E-04
SRKN	5	300	0.9E-08	0.9E-07	0.9E-06
SRKN	6	200	4.4E-09	4.4E-08	4.3E-07
SI	6	200	4.6E-08	4.6E-07	4.6E-06

9.5　一种改进的显式辛算法

1. 改进的显式辛差分格式的构成

对于受摄 Hamilton 系统(例如受摄二体问题,摄动源亦为引力),若用运动天体的坐标矢量 $\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 作为正则共轭变量,即

$$z=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{r}} \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{9.47}$$

则相应的 Hamilton 函数为

$$H(p,q)=H_0(p,q)-R(q) \tag{9.48}$$

其中 H_0 是中心天体和运动天体相互作用构成的二体问题(即无摄运动)部分,有

$$H_0(p,q)=T(p)-V_0(q) \tag{9.49}$$

$R(q)$为摄动函数。这是一自治系统，前面已提过，即使 R 显含自变量 t，亦可通过正则扩充使其转化为自治系统。因此，我们仍采用 $R(q)$的形式进行讨论，这并不影响所讨论的问题。既然是受摄二体问题，应有

$$\frac{|R|}{|V_0|}=O(\varepsilon) \tag{9.50}$$

在太阳系中所要研究的大多数运动情况(包括人造地球卫星的运动)，对应 $\varepsilon \leqslant 10^{-3}$。为了表达方便，将(9.48)式改写成下列形式：

$$H(p,q)=H_0(p,q)-\varepsilon H_1(q) \tag{9.51}$$

如果按 Hamilton 函数的原形式(9.48)进行分离，即

$$H=T(p)+V(q)$$
$$V(q)=-V_0(q)-R(q)$$

则相应的显式辛差分格式已构成，因其局部截断误差相对较大，对定量计算而言还不够理想。但若按新形式(9.51)分解，则有不同效果，其中 $H_0(p,q)$对应无摄运动，有严格的分析解，当然是 Hamilton 流，而第二部分 $-\varepsilon H_1(q)$则可构成 Euler 流，有

$$\left.\begin{aligned}&(q^i,\bar{p}^i)-(q^{i-1},p^{i-1})+s\nabla H_0(q^{i-1},p^{i-1})\\&p^i=\bar{p}^i-sH_{1q}(q^i)\\&i=1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{9.52}$$

其中 $H_{1q}=\partial H_1/\partial q$，前一步$(q^i,\bar{p}^i)$的计算公式只是一个形式写法，实按二体问题“跨”一步(s)严格计算。由此复合构成的一阶辛差分格式为

$$(g_H^s)_1=E_{H_1}^s\circ(g_{H_0}^s)=(g_{H_0}^s)\circ E_{H_1}^s \tag{9.53}$$

对于 m 阶算法，由第 $k-1$ 步$(t_{k-1},q_{k-1},p_{k-1})$到第 k 步(t_k,q_k,p_k)的计算公式为

$$\left.\begin{aligned}&(q^1,\bar{p}^1)=(q^0,p^0)+hc_1\nabla H_0(q^0,p^0)\\&p^1=\bar{p}^1-hd_1H_{1q}(q^1)\\&(q^2,\bar{p}^2)=(q^1,p^1)+hc_2\nabla H_0(q^1,p^1)\\&p^2=\bar{p}^2-hd_2H_{1q}(q^2)\\&\cdots\cdots\\&(q^m,\bar{p}^m)=(q^{m-1},p^{m-1})+hc_m\nabla H_0(q^{m-1},p^{m-1})\\&p^m=\bar{p}^m-hd_mH_{1q}(q^{m-1})\end{aligned}\right\} \tag{9.54}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&q^0=q_{k-1}\quad,\quad p^0=p_{k-1}\\&q^m=q_k\quad,\quad p^m=p_k\\&k=1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{9.55}$$

h 是积分步长，c_i 和 $d_i(i=1,2,\cdots,m)$是待选参数，直到八阶的具体数值，前面均已给出。注意，在上述复合过程中，每一步(s)二体问题的计算，对应 $s=hc_i$。

由于无摄运动部分可保证足够的精度，那么按上述分解形式构造的显式辛差分格式，其局部截断误差只是原方法的 ε 倍，显然减小，这将导致整个计算精度的提高。如果摄动部分 $\varepsilon H_1(q)$还可分离出一部分与 $H_0(p,q)$合并，且有分析解，那么按上述方法还可构造精度更高的显式辛差分格式，这有利用中间轨道的含义，且类似于上一章的改进的 Encke 方法的构思。

2. 数值验证

为了与前面的计算结果作比较，仍以 Lageos 卫星在地球形状主要带谐项(J_2，J_3，J_4)摄动下的运动为背景，初值选取亦同上一节。计算结果列于表 8，其中 RK 和 SI6，即前面已得到的结果(见表 6)，LS6 即上述改进的显式辛算法。

表 8 $\Delta(M+\omega)$

type	order	T_0/h	$100(T_0)$	$1000(T_0)$	$10000(T_0)$
RK	6(7)	200	3.5E-10	3.3E-08	3.4E-06
SI6	6	200	4.6E-08	4.6E-07	4.6E-06
LS6	6	50	5.0E-10	6.0E-09	12.0E-08

表 8 中列出的数据已清楚地表明，改进的显式辛算法确实有效，既能保持辛算法的优点，又减小了局部截断误差，从而提高了长弧段的计算精度，即使所取步长比其它两种方法增大 4 倍，可精度仍很高。若将步长改为 $T_0/h=100$，则在 $100T_0$(即 100 圈)弧段上，沿迹误差 $\Delta(M+\omega)$可降至 1.0×10^{-11}。但有一点必须说明，对于 LS6，到 $1000T_0$ 后接近 $10000T_0$ 时，沿迹误差的累积稍为加速，几乎是按 $2(t-t_0)$增长，这主要是到计算后程，舍入误差的累积开始起作用的原因，因此步长不宜太小。有关这一问题的讨论，请见本章参考文献[15]。

作为本章的结尾，有如下两点说明：

(1)对于不可分离的 Hamilton 系统，没有统一格式的显式辛差分格式。如果不可分部分较小，或是小耗散系统，经简单处理后，引用显式辛算法以及 9.5 中给出的改进的显式辛算法，计算效果仍然是好的[14]-[16]。

(2)目前只对线性 Hamilton 系统构造出辛多步法，而对非线性 Hamilton 系统(动力天文中所遇到的问题几乎都是非线性系统)，则不能构造上述意义下的辛多步法，这一问题有待进一步研究。

参考文献

[1] Feng, K., Proc. 1984 *Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*. Ed, Feng, K., Science Press 42.

[2] Feng, K., *J. Comp. Math.*, 4(1986), 279.

[3] Forest, E. and Ruth, R. D., *Physica D*, 43(1990), 105.

[4] Yoshida, H., *Phys. Lett. A*, 150(1990), 262.

[5] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 1978, Springer, N. Y.

[6] 欧阳光中，流形上的微积分，上海科技出版社，1988 年。

[7] Qin Men-Zhao and Zhu Wen-Jie, *Computing*, 47(1992), 309.
[8] Qin Men-Zhao and Zhang Mei-Qing, *J. Comp. Math.*, 10(1992), 215.
[9] Qin Men-Zhao and Zhu Wen-Jie, *Computers Math. Applic.*, 22(1991), 85.
[10] Okunbor, D. I. and Skeel, R. D., *Math. Comp.*, (*to appear*).
[11] Wisdom, J. and Holman, M., *Astron. J.*, 102(1991), 1528.
[12] Sussman, G. J. and Wisdom, J., *Science*, 257(1992), 56.
[13] 刘林、廖新浩,计算物理,12(1995),102.
[14] 廖新浩、刘林,计算物理,11(1994),212.
[15] 廖新浩、刘林,天文学报,36(1995),82.
[16] 刘林、廖新浩、赵长印、王昌彬,天文学报,35(1994),51.

第十章　轨道改进

10.1　问题的提法

通过前面各章的讨论，读者已经清楚地看出，天体运动(即使是受摄二体问题)所涉及的数学模型，是一个相当复杂的非线性动力系统，在所选取的直角坐标系中，相应的运动微分方程可写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)\\&\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}_0\quad,\quad\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}_0\end{aligned}\right\}\tag{10.1}$$

对于受摄二体问题，方程(10.1)又可写成

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_0(r)+\boldsymbol{F}_\epsilon(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t;\varepsilon)\tag{10.2}$$

其中 $\boldsymbol{F}_0$ 是中心天体的质点引力加速度，即

$$\boldsymbol{F}_0=-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\tag{10.3}$$

$\mu=G(M+m)$，$\boldsymbol{F}_\epsilon$ 为各种摄动加速度。由于 $\boldsymbol{F}_0$ 对应于一可积系统，相应的解为不变椭圆，那么问题(10.1)可经常数变易将其转化为以椭圆根数来描述的小参数方程，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=f(\sigma,t;\epsilon)\\&\sigma(t_0)=\sigma_0\end{aligned}\right\}\tag{10.4}$$

这里 σ 是 6 维向量，其元素即 6 个轨道根数，f 是相应的 6 维向量函数。

如果问题(10.1)或(10.4)的数学模型(即右函数 $\boldsymbol{F}_\epsilon$ 或 f)以及相应的初始条件是准确的，那么，可以积分上述方程给出运动天体状态的演变，即

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,t)\\&\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,t)\end{aligned}\right\}\tag{10.5}$$

或

$$\sigma(t)=\sigma(\sigma_0,t)\tag{10.6}$$

但事实上，数学模型(主要是一些已模型化的摄动因素包含的物理参数)和初值是不准确的，计算值 $\boldsymbol{r}(t)$，$\dot{\boldsymbol{r}}(t)$或 $\sigma(t)$与天体的真实位置和速度并不相符，这就需要通过一系列的观测值来校正上述有关参数和初值(即不准确的初始轨道 σ_0)，轨道改进的名称就源于此，即通过观测量来校正原先给出的不准确的轨道及有关参数。有时也称轨道改进为轨道确定。

从解微分方程的角度来看，轨道改进就是将一个常微分方程初值问题转化为边值问题(观

测值即“边值”），由边值条件反过来确定初值（轨道），此即“打靶法”，这将涉及到求代数方程的解。不过轨道改进过程中还要用到大量观测资料的统计特性，而不是简单的将一个初值问题转化为边值问题来求解，这又将涉及到最优估计问题，因此也叫统计定轨。在天体力学领域中，各种天体（包括人造地球卫星）的定轨问题，几乎都是采用最小二乘估计[1]。为了便于引用最优估计理论的一些结果，下面将用相应的语言和符号[2]来阐明轨道改进问题的具体提法。有关概率统计的基本知识和常用符号，本书将不作过多说明，读者如有需要，可翻阅有关书籍。

称待改进的轨道 $\sigma(a,e,i,\Omega,\omega,M$ 或类似的变量）和一些物理参数 β 为状态向量（简称状态量），记作 X，它是 n 维向量，通常 $n\geqslant 6$。对天体进行观测的随机采样数据（如赤道坐标 α,δ，地平坐标 A,h，视向速度 $\dot{\rho}$ 和距离 ρ 等），称为观测量，记作 Y，它是 m 维向量，显然 $m\geqslant 1$。状态量所满足的微分方程可以写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}&=F(X,t)\\ X(t_0)&=X_0 \end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

这里右函数 F 是 n 维向量函数。该方程的解一般可以写成下列形式：

$$X(t)=X(X_0,t) \tag{10.8}$$

为了讨论的需要，暂且将其写成线性形式，即

$$X(t_l)=\Phi(t_l,t_{l-1})X(t_{l-1}) \tag{10.9}$$

或简写为

$$X_l=\Phi_{l,l-1}X_{l-1} \tag{10.10}$$

这一表达式称为状态方程（或称状态转移方程），$\Phi_{l,l-1}$ 是 $n\times n$ 阶状态转移矩阵，表示从状态 X_{l-1} 转移到状态 X_l，且 $\Phi_{l-1,l-1}=I$，I 是 $n\times n$ 阶单位矩阵。关于解(10.10)，是由分析方法给出还是由数值方法给出，这无关紧要，转移矩阵 $\Phi_{l,l-1}$ 的具体形式到底如何，这也不影响下面的讨论。随机采样数据 Y_l 与观测量的真值 $H(X_l,t_l)$ 以及测量噪声 V_l（即随机误差，是 m 维随机向量）之间的关系为

$$Y_l=H(X_l,t_l)+V_l \tag{10.11}$$

通常 $H(X_l,t_l)$ 是一非线性函数，这里也暂写成下列线性形式：

$$Y_l=H_lX_l+V_l \tag{10.12}$$

这一表达式称为测量方程，H_l 是 $m\times n$ 阶测量矩阵。假定 V_l 为一零均值（$EV_l=0$）的白噪声，有方差阵：

$$\left.\begin{aligned} EV_lV_l^T&=R_l \quad (R_l>0)\\ EV_lV_r^T&=0 \quad (l\neq r) \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

这里均值 EV_l 就是随机量 V_l 的数学期望。在均值为零的情况下，方差即表示为 $EV_lV_l^T$。关于 $H(X_l,t_l)$ 的非线性情况，将在后面 10.3 中具体讨论。

在上述基础上，轨道改进问题就成为一个状态估值问题，其具体提法是：利用带有随机观测误差 $V_l(l=1,2,\cdots,k)$ 的一测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 和已知的初始状态 X_k，确定在某种意义下的“最优”估值 $\hat{X}_k$。

这里首先要考虑的一个问题，即是否与系统(10.10)，(10.12)相应的任何一测量序列都能唯一确定状态 X_k 的一个“最优”估值？在第一章 1.7 节初轨计算中曾提到可观测性问题，这里同样有类似问题，下面就讨论轨道改进中的可观测性条件。

(10.10)和(10.12)式对应如下确定系统：

$$\left.\begin{aligned}X_l&=\Phi_{l,l-1}X_{l-1}\\Y_l&=H_lX_l\end{aligned}\right\}\tag{10.14}$$

定义：如果对时刻 k_0，存在时刻 $k=k_0+N-1$（N 为正整数），使得由测量序列 $Y_{k_0},Y_{k_0+1},\cdots,Y_{k_0+N}$ 能够唯一确定系统(10.14)在 k_0 时刻的状态 X_{k}，那么就称该系统在 k_0 时刻是完全可观测的，或称该系统在$[k_0,k]$区间上是完全可观测的。下面将用数学形式来表达相应的条件，为此，将(10.14)的第二式改写成

$$Y_l=H_l\Phi_{l,k_0}X_{k_0}\quad(l\geqslant k_0)\tag{10.15}$$

其中 Φ_{l,k_0}表示从状态 X_{k_0}到 X_l 的转移矩阵，有 $\Phi_{k_0,k_0}=I$。这一方程组可改写成下列形式：

$$\begin{bmatrix}H_{k_0}\\H_{k_0+1}\Phi_{k_0+1,k_0}\\\vdots\\H_{k_0+N-1}\Phi_{k_0+N-1,k_0}\end{bmatrix}X_{k_0}=\begin{bmatrix}Y_{k_0}\\Y_{k_0+1}\\\vdots\\Y_{k_0+N-1}\end{bmatrix}\tag{10.16}$$

或简写成

$$AX_{k_0}=B\tag{10.17}$$

A,B 即(10.16)式左、右两端的矩阵。要使上述系统在 k_0 时刻完全可观测，就等价于要求存在一个正整数 N，使方程(10.16)对 X_k 有唯一解，其充分必要条件是下述矩阵为正定：

$$A^TA=\sum_{l=k_0}^{k_0+N-1}(\Phi_{l,k_0}^TH_l^T)(H_l\Phi_{l,k_0})>0\tag{10.18}$$

显然，当系统在 k_0 时刻完全可观测时，测量序列 $Y_{k_0},Y_{k_0-1},\cdots,Y_k$ （$k=k_0+N-1$）也能唯一确定系统(10.14)在 k 时刻的状态 X_k，因为

$$X_k=\Phi_{k,k_0}X_{k_0}\tag{10.19}$$

因此，为了讨论方便，当转移矩阵 Φ_{k,k_0}可逆时，条件(10.18)亦可改写成下列形式：

$$\sum_{l=1}^{k}(\Phi_{l,k}^TH_l^T)(H_l\Phi_{l,k})>0\tag{10.20}$$

容易证明，当条件(10.20)式成立时，对一切 $m\times m$ 阶正定矩阵序列 $W_1,W_2,\cdots,W_k$，下式必成立：

$$\sum_{l=1}^{k}(\Phi_{l,k}^TH_l^T)W_l(H_l\Phi_{l,k})>0\tag{10.21}$$

在下节要介绍的最小二乘估计中，W_l 就是加权矩阵。

10.2 最小二乘估计

1. 无偏最小方差估计

假定有一测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$，它们包含一定的随机测量误差，由这一测量序列来估计某一状态量 X，给出估计值 $\hat{X}$，显然 $\hat{X}$ 也是一随机量。

所谓无偏估计，是指随机量 $\hat{X}$ 的数学期望(即平均值)等于状态量 X 的数学期望，即

$$E\hat{X}-EX \tag{10.22}$$

当状态量 X 为非随机量时，即要求

$$E\hat{X}=X \tag{10.23}$$

无偏性表明，当进行大量重复性测量，获得多个测量序列的独立样本时，由每个测量序列样本所求得的估计量 $\hat{X}$ 之平均近似地为 EX(或 X)，这是相当重要的。但仅有无偏性还不够，要寻找最优的估计，还要求 $\hat{X}$ 是最小方差估计，即估计误差 $\hat{X}-X$ 的方差达到极小：

$$\mathrm{var}(\hat{X}-X)=E(\hat{X}-X)(\hat{X}-X)^T-\min \tag{10.24}$$

min 是对一切可能的估计 $\hat{X}$ 而言。

无偏性将保证由不同的测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 的样本所获得的估计量 $\hat{X}$ 在状态 X 的附近摆动，而最小方差将保证这种摆动平均值达极小。

2. 最小二乘估计

这里所说的最小二乘估计是一种简单的最小二乘估计，亦称古典最小二乘估计。考虑下列线性系统：

$$\left.\begin{aligned} X_l&=\Phi_{l,k}X_k \\ Y_l&=H_lX_l+V_l \end{aligned}\right\} \tag{10.25}$$

其中 V_l 的性质同前。由测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 获得的状态 X_k 的最小二乘估计 $\hat{X}_{k/k}$，它使残差平方和达到极小，即

$$U=\sum_{l=1}^{k}(Y_l-H_l\Phi_{l,k}\hat{X}_{k/k})^T(Y_l-H_l\Phi_{l,k}\hat{X}_{k/k})=\min \tag{10.26}$$

这里 U 是标量，Y_l 和 $\hat{X}_{k/k}$ 都是列向量，不难求出

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{X}_{k/k}}=-2\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^TH_l^T(Y_l-H_l\Phi_{l,k}\hat{X}_{k/k})$$

$\partial U/\partial\hat{X}_{k/k}$ 也是列向量。条件(10.26)要求

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{X}_{k/k}}=0$$

即

$$(\sum_{l-1}^{k}\Phi_{l,k}^TH_l^TH_l\Phi_{l,k})\hat{X}_{k/k}=\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^TH_l^TY_l \tag{10.27}$$

此即通常所说的法方程，而矩阵

$$\sum_{l=1}^{k}(H_l\Phi_{l,k})^T(H_l\Phi_{l,k})$$

就是法化矩阵。显然要求 $m\times k\geqslant n$，方程组(10.27)是关于 n 维向量 $\hat{X}_{k/k}$ 的线性方程组，其解可立即写出，即

$$\hat{X}_{k/k}=(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^TH_l^TH_l\Phi_{l,k})^{-1}(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^TH_l^TY_l) \tag{10.28}$$

条件(10.20)保证了方程组(10.27)能唯一确定状态 $\hat{X}_{k/k}$，(10.28)式就是由测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 获得的状态 X_k 的最小二乘估计的计算公式。

不难证明，上述线性估计 $\hat{X}_{k/k}$ 是 X_k 的无偏估计，有

$$E\hat{X}_{k/k}=(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T H_l \Phi_{l,k})^{-1}(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T EY_l)$$

而

$$EY_l=E(H_l X_l+V_l)=H_l X_l=H\Phi_{l,k}X_k$$

代入上式即得

$$E\hat{X}_{k/k}=(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T H_l \Phi_{l,k})^{-1}(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T H_l \Phi_{l,k})X_k=X_k$$

由此可知，最小二乘估计是线性无偏估计，该估计使残差平方和达极小。

显然，简单最小二乘估计没有充分利用大量随机采样数据的统计特性。不过这是有其实际背景的，在随机采样数据不多时，或并不具有理想的统计特性时，当然就谈不上去利用这些特性，而过去对自然天体的观测，采样数据就不多，引用这种简单的最小二乘估计是很自然的。近年来，由于测量手段的不断改进，提供了大量采样的可能性，特别是对人造天体的跟踪，因此，现代最优估计理论随之发展起来，这就有可能在简单最小二乘估计的基础上进一步赋予新的内容：最优加权，避免大量数据存贮的递推算法，以及充分利用初始估计等。

3. 加权最小二乘估计

考虑随机采样数据具有不同的精度，假定一测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$，相应地有权矩阵序列 $W_1,W_2,\cdots,W_k$，皆为正定矩阵。加权残差平方和为

$$U=\sum_{l=1}^{k}(Y_l-H_l\Phi_{l,k}\hat{X}_{k/k})^T W_l (Y_l-H_l\Phi_{l,k}\hat{X}_{k/k})$$

由

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{X}_{k/k}}=0$$

得

$$(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,k})\hat{X}_{k/k}=\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l Y_l \tag{10.29}$$

这就是加权法方程。由此可得加权最小二乘估计 $\hat{X}_{k/k}$ 的计算公式：

$$\hat{X}_{k/k}=(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,k})^{-1}(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l Y_l) \tag{10.30}$$

由(10.30)式，根据对测量噪声 V_l 的假定，可以证明这样的最小二乘估计 $\hat{X}_{k/k}$ 也是无偏估计，进而可给出估计误差：

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k/k}-X_k&=\hat{X}_{k/k}-E\hat{X}_{k/k}\\&=(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,k})^{-1}(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l V_l)\end{aligned}$$

相应的估计误差方差矩阵为

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\hat{X}_{k/k}-X_k)=&(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,k})^{-1}(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l R_l W_l H_l \Phi_{l,k})\\&\times(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T W_l H_l \Phi_{l,k})^{-1}\end{aligned} \tag{10.31}$$

其中利用了 V_l 的性质和 $W_l=W_l^T$。不难证明，当权矩阵 W_l 取为 R_l^{-1} 时，上述方差达极小。这里证明从略，读者如有兴趣请参阅本章参考文献[2]第一章，或本章参考文献[3]第十四章。此时有

$$\hat{X}_{k/k}=(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k})^{-1}(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T R_l^{-1} Y_l) \tag{10.32}$$

相应的方差（记作 $P_{k/k}$）为

$$P_{k/k}=(\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k})^{-1} \tag{10.33}$$

根据上述讨论可以看出，对线性系统，当残差平方和中取最优加权矩阵 $W_l=R_l^{-1}$ 时（即对随机采样数据 Y_l 进行最优加权），最小二乘估计是线性无偏最小方差估计（严格地说，是没有初始估计的最小方差估计），这种最优加权的最小二乘估计又称为马尔可夫估计。

4. 最小二乘估计的两种算法

常采用的两种算法是批处理算法和递推算法，后一算法又称为序贯算法（亦称序贯处理）。

关于批处理算法，这是最小二乘估计的经典算法，即一测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k,Y_{k+1},Y_{k+2},\cdots,Y_{k+s}$ 的全部数据整批参加估算，从而按(10.32)式算出状态 X_k 的最优估计 $\hat{X}_{k/k+s}$，式中求和是从 $l=1$ 到 $l=k+s$。这里下标 $k/k+s$ 中上面的 k 表示状态 X 对应 t_k 时刻，而下面的 $k+s$ 就表示用了序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{k+s}$ 的全部数据。当然，也可用全部资料获得状态 X_{k+s} 的最优估计 $\hat{X}_{k+s/k+s}$。这种算法在大批资料的情况下，数据存贮量太大，因此，在最优加权的最小二乘估计中又提出了避免存贮量大的递推算法——序贯算法。

关于序贯算法，可用下述过程进行说明：将观测量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k,Y_{k+1},Y_{k+2},\cdots,Y_{k+s}$ 分成两批，首先由 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 获得 X_k 的最小二乘估计 $\hat{X}_{k/k}$，然后丢掉这一批观测量，再利用估计 $\hat{X}_{k/k}$ 和后一批测量 $Y_{k+1},Y_{k+2},\cdots,Y_{k+s}$ 来求得状态 X_{k+s} 的最小二乘估计 $\hat{X}_{k+s/k+s}$，这不同于批处理算法中将 $k+s$ 个观测量作一批处理而获得 $\hat{X}_{k+s/k+s}$ 的过程。

按(10.32)和(10.33)式有

$$\hat{X}_{k+s/k+s}=(\sum_{l=1}^{k+s}\Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k+s})^{-1}(\sum_{l=1}^{k+s}\Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} Y_l) \tag{10.34}$$

$$P_{k+s/k+s}=(\sum_{l=1}^{k+s}\Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k+s})^{-1} \tag{10.35}$$

如令

$$\hat{X}_{k+s/k}=\Phi_{k+s,k}\hat{X}_{k/k} \tag{10.36}$$

$$\hat{P}_{k+s/k}=\Phi_{k+s,k}P_{k/k}\Phi_{k+s/k}^T \tag{10.37}$$

并利用

$$\Phi_{k+s,k}^{-1}=\Phi_{k,k+s}$$

则得

$$\hat{X}_{k+s/k+s}=(P_{k+s/k}^{-1}+\sum_{l=k+1}^{k+s}\Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} H_l \Phi_{l,k+s})^{-1}$$

$$\times(P_{k+s/k}^{-1}\hat{X}_{k+s/k}+\sum_{l=k+1}^{k+s}\Phi_{l,k+s}^T H_l^T R_l^{-1} Y_l) \tag{10.38}$$

同样可得

$$P_{k+s/k-s}=(P_{k+s/k}^{-1}+\sum_{l=k+1}^{k+s}\Phi_{l,k+s}^{T}H_l^TR_l^{-1}H_l\Phi_{l,k+s})^{-1} \tag{10.39}$$

(10.36)～(10.39)式就构成了最小二乘估计的递推公式。可以称 $\hat{X}_{k+s/k}$为预报值，$P_{k+s/k}$即预报误差方差阵。根据上述方法，可将观测序列按时间顺序分为若干批，每次处理一批观测量，处理后即可丢掉该批观测量，并递推去处理下一批观测量。对线性系统，由(10.36)～(10.39)式递推所获得的最小二乘估计 $\hat{X}_{k+s/k-s}$与由(10.34)～(10.35)批处理获得的最小二乘估计 $\hat{X}_{k+s/k-s}$显然是等价的。

由于 s 表示该批观测量的个数，而且可任意选取，因此，当取 $s=1$ 时，就可构成类似卡尔曼(Kalman)滤波那样的逐步递推。

5. 具有初始估计的最小二乘估计

一般的最小二乘估计是没有初始估计的，这是与卡尔曼滤波的一个重要区别。但是，利用上一段给出的递推算法，同样能导出在有初始估计条件下的最小二乘估计公式。

除有一测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 外，对状态 X_0 还有一个初始估计(也叫先验估计)$\hat{X}_{0/0}$，并知道 $\hat{X}_{0/0}$的估计误差方差阵 $P_{0/0}$($P_{0/0}^{-1}$又叫先验权)。在此情况下，由(10.36)～(10.39)式不难给出具有初始估计的最小二乘估计计算公式为

$$\hat{X}_{k/0}=\Phi_{k,0}\hat{X}_{0/0} \tag{10.40}$$

$$P_{k/0}=\Phi_{k,0}P_{0/0}\Phi_{k,0}^T \tag{10.41}$$

$$\hat{X}_{k/k}=(P_{k/0}^{-1}+\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^TH_l^TR_l^{-1}H_l\Phi_{l,k})^{-1}\times(P_{k/0}^{-1}\hat{X}_{k/0}+\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^TH_l^TR_l^{-1}Y_l) \tag{10.42}$$

$$P_{k/k}=(P_{k/0}^{-1}+\sum_{l=1}^{k}\Phi_{l,k}^TH_l^TR_l^{-1}H_l\Phi_{l,k})^{-1} \tag{10.43}$$

其中 $\hat{X}_{k/0}$就可看作初始预报值，$P_{k/0}$为其预报误差方差阵。

10.3 非线性系统的最小二乘估计——轨道改进

对于天体定轨问题，所涉及的是非线性系统，相应的状态方程和测量方程可写成下列形式：

$$X_l=f(X_k,t_l) \tag{10.44}$$

$$Y_l=H(\sigma_l(X_k,t_l),t_l)+V_l=H(X_k,t_l)+V_l \tag{10.45}$$

这里 $X_l=\begin{pmatrix}\sigma_l\\ \beta_l\end{pmatrix}$表示 t_l 时刻的 n 维状态向量(天体轨道根数和待估参数)，Y_l 表示 t_l 时刻的 m 维观测向量，V_l 是相应的测量噪声(m 维向量)，假定

$$EV_l=0$$

并有方差阵：

$$\left.\begin{aligned}EV_lV_l^T&=R_l\quad(R_l>0)\\EV_lV_r^T&=0\quad(l\neq r)\end{aligned}\right\}\tag{10.46}$$

关于状态方程，向量函数 f 的形式取决于用什么方法求根数 σ 相应的运动微分方程的解和待估参数 β 的变化规律。但 f 的作用只有两个，一是用来作状态转移计算，即由 X_k 算出 X_l，就此而言，f 的形式到底如何无关紧要；另一是在构成法方程时将要用到 f 的偏导数：

$$\frac{\partial X_l}{\partial X_k}=\frac{\partial f}{\partial X_k}$$

其具体形式视问题的要求而定。关于测量方程，对于天体定轨问题，H 是观测量($\alpha,\delta;A,h;\dot{\rho};\rho$ 等)与天体轨道根数 σ 之间的函数关系，它的作用也是两个，一是由 t_l 时的卫星根数 σ_l 计算相应时刻的观测量 Y_l；另一是在构成法方程时要用到函数 H 以提供观测量 Y_l 对根数 σ_l 的偏导数 $\partial Y_l/\partial\sigma_l=\partial H/\partial\sigma_l$。当用坐标、速度作为基本变量通过数值方法给出 t_l 时刻的 $\boldsymbol{r}_l,\dot{\boldsymbol{r}}_l$ 时，可直接由此算出 t_l 时刻的观测量 Y_l，此时 f 的第一个作用消失，H 的计算也随之得以简化。但是，这并不影响有关天体运动的状态量仍采用轨道根数 σ。

关于上述定轨问题对应的非线性系统(10.45)的最小二乘估计，即有一测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_s$ 和待估状态量 X_k 的一个验前估计 $\hat{X}_{k/0}$，如何求得状态量 X_k 的最小二乘估计 $\hat{X}_{k/s}$，其中 X_k 对应的时刻 t_k：$t_1\leqslant t_k\leqslant t_s$。

最小二乘估计的最优准则是使下列残差平方和达极小：

$$U=\sum_{l=1}^{s}(Y_l-H(\hat{X}_{k/s},t_l))^TR_l^{-1}(Y_l-H(\hat{X}_{k/s},t_l))\tag{10.47}$$

这里取了最优加权，如不取，则 $R_l^{-1}=I$，I 是单位阵。由于是非线性系统，要求出使残差平方和(10.47)式达极小的严格解 $\hat{X}_{k/s}$ 是困难的，通常是采用在线性化基础上的迭代过程来给出 $\hat{X}_{k/s}$。为此，以验前估计 $\hat{X}_{k/0}$ 为参考值，将(10.47)式进行线性化，即

$$Y_l-H(\hat{X}_{k/0},t_l)=B(\hat{X}_{k/0},t_l)(X_k-\hat{X}_{k/0})+V_l\tag{10.48}$$

其中

$$B(X,t)=\frac{\partial H(X,t)}{\partial X}\tag{10.49}$$

事实上，对于天体定轨问题，B 矩阵应该是下列形式：

$$B(\hat{X}_{k/0},t)=\left[\frac{\partial H(\sigma,t)}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma(X_k,t)}{\partial X_k}\right]_{X_k=\hat{X}_{k/0}}\tag{10.50}$$

注意，(10.48)式中的验前估计 $\hat{X}_{k/0}$ 与上一节中所出现的先验估计 $\hat{X}_{0/0}$ 不相同，这里的 $\hat{X}_{k/0}$ 只是作为线性化后迭代求解时的一个初值，算出第 0 次近似 $\hat{X}_{k/s}^{(0)}$。迭代过程如下：

根据上节对线性系统建立的方法，以 0 次近似 $\hat{X}_{k/s}^{(0)}$ 求得 X_k 的一个最小二乘估计，当作第一次近似 $\hat{X}_{k/s}^{(1)}$，再往下迭代。假定已获得第 i 次近似 $\hat{X}_{k/s}^{(i)}$，有

$$Y_l-H(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)=B(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)(X_k-\hat{X}_{k/s}^{(i)})=V_l\tag{10.51}$$

这里，$Y_l-H(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)$，$X_k-\hat{X}_{k/s}^{(i)}$，$B(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)$ 分别代替了上一节线性系统中的观测量 Y_l、状态量 X_k 和矩阵 $H_l\Phi_{l,k}$，于是第 $i+1$ 次近似 $\hat{X}_{k/s}^{(i+1)}$ 的计算公式为

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k/s}^{(i+1)}=\hat{X}_{k/s}^{(i)}&+\left(\sum_{l=1}^{s}B^T(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)R_l^{-1}B(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)\right)^{-1}\\&\times\left(\sum_{l=1}^{s}B^T(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)R_l^{-1}[Y_l-H(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)]\right)\end{aligned}\tag{10.52}$$

相应的残差平方和的第$(i+1)$次迭代值为

$$U^{(i+1)}=\sum_{l=1}^{s}(Y_l-H(\hat{X}_{k/s}^{(i+1)},t_l))^T R_l^{-1}(Y_l-H(\hat{X}_{k/s}^{(i+1)},t_l)) \tag{10.53}$$

上述迭代过程，只要验前估计(迭代初值)$\hat{X}_{k/0}$的误差在某一范围内，通常是收敛的，其表现为各次残差平方和的迭代值逐次减小，存在一极值。而在具体轨道改进工作中，只要迭代过程进行到两次残差平方和的迭代值$U^{(i)}$和$U^{(i+1)}$满足

$$|U^{(i)}-U^{(i+1)}|\leqslant\mu$$

就中止，其中μ是按精度要求给定的一个大于零的小量。

对于非线性系统(10.45)式，同样可以给出具有初始估计的最小二乘估计公式。设X_k的初始估计(先验估计)为$\hat{X}_{k/0}$，相应的方差为$P_{k/0}$，要求由$\hat{X}_{k/0},Y_1,Y_2,\cdots,Y_s$给出$X_k$的最小二乘估计$\hat{X}_{k/s}$。但要注意，这里的$\hat{X}_{k/0}$不同于前面所用的迭代初值(验前估计)$\hat{X}_{k/0}^{(0)}$。当然，这里的初始估计$\hat{X}_{k/0}$可以同时作为迭代初值$\hat{X}_{k/0}^{(0)}$。在此情况下，最小二乘估计的迭代公式为

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k/s}^{(i+1)}=&\hat{X}_{k/s}^{(i)}+(P_{k/0}^{-1}+\sum_{l=1}^{s}B^T(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)R_l^{-1}B(\hat{X}_{k/S}^{i},t_l))^{-1}\\&\times(P_{k/0}^{-1}(\hat{X}_{k/0}-\hat{X}_{k/s}^{(i)})+\sum_{l=1}^{s}B^T(\hat{X}_{k/s}^{(i)},t_l)R_l^{-1}[Y_l-H(\hat{X}_{k/S}^{i},t_l)])\end{aligned} \tag{10.54}$$

对于人造天体定轨问题，由于采样数据往往相当多，为了避免大量数据存贮和法化矩阵求逆的困难，同样可采用线性系统中的序贯算法。不过，对于非线性系统，由测量序列$Y_1,Y_2,\cdots,Y_s$用分批递推算法求得的X_k的最小二乘估计与用所有观测量的批处理获得的X_k的最小二乘估计不完全等价，一般地说还要损失精度，只有在一定条件下采用序贯算法才是有利的，读者可参阅有关文献。

10.4 轨道改进中的几组基本关系式

根据上节的讨论可知，下述三组偏导数关系是轨道改进工作中的基本关系式，即

$$\frac{\partial Y}{\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})},\quad\frac{\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})}{\partial\sigma},\quad\frac{\partial\sigma}{\partial X_0}$$

它们都是由于非线性系统线性化及构造相应的法方程时所需要的。其中Y是四种观测量：$\alpha,\delta;A,h;\dot{\rho};\rho$。$\sigma$是六个椭圆轨道根数$a,e,i,\Omega,\omega,M$；或无奇点变量，例如$a,i,\Omega,\xi=e\cos\omega,\eta=-e\sin\omega,\lambda=M+\omega$。而$X_0$是待估状态量，包括待改进的$t_0$时刻(这是为了书写方便，任何一个$t_k$都可以)的轨道根数$\sigma_0$(或平均根数$\bar{\sigma}_0$)和某些待估参数$\beta$。前两组偏导数即上一节$B$矩阵中的$\partial H/\partial\sigma$：

$$\frac{\partial H}{\partial\sigma}=\frac{\partial H}{\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})}\frac{\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})}{\partial\sigma}$$

采用这种表达形式，是因为四种观测量与轨道根数之间的关系通过$\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$来表达比较简单。第三组偏导数$\partial\sigma/\partial X_0$涉及到状态转移问题，这里$X_0=\begin{pmatrix}\sigma_0\\\beta\end{pmatrix}$。下面分别给出三组偏导数的具体关系式。

1. $\partial Y/\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$

(1)($\partial\boldsymbol{\rho}/\partial\boldsymbol{r}$)　这里用坐标旋转的方法来进行推导。图 10.1 是以观测者 O' 为中心的天球，S_* 为天体视位置，O'-$x'y'z'$ 是测站赤道直角坐标系，S_*-$j_\rho j_\alpha j_\delta$ 是辅助坐标系，j_ρ，j_α，j_δ 分别为天体视向径方向、赤经圈和赤纬圈切线方向的单位矢量。根据天体和测站在所选择坐标系中的相对位置(见图 10.2)，有

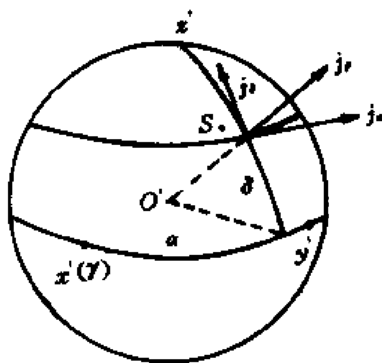


图 10.1　测站坐标系 O'-$x'y'z'$ 和辅助坐标系 S_*-$j_\rho j_\alpha j_\delta$

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R} \tag{10.55}$$

由此可知，$\Delta\boldsymbol{\rho}$ 在 O'-$x'y'z'$ 坐标系中的三个分量为

$$\Delta x',\Delta y',\Delta z'$$

而在辅助坐标系中的三个分量为

$$\Delta\rho,\rho\cos\delta\Delta\alpha,\rho\Delta\delta$$

这两种投影是同一个向量 $\Delta\boldsymbol{\rho}=\Delta\boldsymbol{r}-\Delta\boldsymbol{R}$，符号 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 各表示 α 和 δ 的微小变化。根据坐标旋转不难得知：

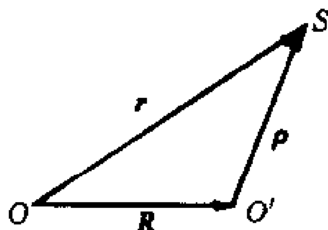


图 10.2　天体 S 和测站 O' 的相对位置

$$\begin{pmatrix}\Delta\rho\\ \rho\cos\delta\Delta\alpha\\ \rho\Delta\delta\end{pmatrix}=R_y(-\delta)R_z(\alpha)\begin{pmatrix}\Delta x'\\ \Delta y'\\ \Delta z'\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\cos\delta & 0 & \sin\delta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\delta & 0 & \cos\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\delta & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x-\Delta X\\ \Delta y-\Delta Y\\ \Delta z-\Delta Z\end{pmatrix} \tag{10.56}$$

若记

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{r}}\\ \rho\cos\delta\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{r}}\\ \rho\,\dfrac{\partial\delta}{\partial\boldsymbol{r}}\end{pmatrix} \tag{10.57}$$

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\rho}}{\partial\boldsymbol{R}}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{R}}\\ \rho\cos\delta\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{R}}\\ \rho\,\dfrac{\partial\delta}{\partial\boldsymbol{R}}\end{pmatrix} \tag{10.58}$$

则由(10.56)式，得

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{r}}\right)=-\left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{R}}\right)=R_y(-\delta)R_z(\alpha)$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha & \cos\delta\sin\alpha & \sin\delta\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ -\sin\delta\cos\alpha & -\sin\delta\sin\alpha & \cos\delta\end{pmatrix}\tag{10.59}$$

如果需要,上述矩阵中的 α,δ 都可用 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}$ 的分量来表示,例如

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{r}}\right)^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho}(x-X)\\ \frac{1}{\rho}(y-Y)\\ \frac{1}{\rho}(z-Z)\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\tag{10.60}$$

(2)$(\partial\rho/\partial\boldsymbol{r})$的另一表达形式　这里用地平坐标来表达 ρ,即 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(\rho,A,h)$。类似上述坐标旋转的方法,再根据$(A,h)$和$(\alpha,\delta)$两种坐标的关系,不难给出

$$\begin{pmatrix}\Delta\rho\\ -\rho\cos\Delta A\\ \rho\Delta h\end{pmatrix}=R_y(-h)R_z(2\pi-A)R_y(\varphi-\frac{\pi}{2})R_z(S-\pi)\begin{pmatrix}\Delta x-\Delta X\\ \Delta y-\Delta Y\\ \Delta z-\Delta Z\end{pmatrix}\tag{10.61}$$

由此可得

$$\begin{pmatrix}\rho\cosh\frac{\partial A}{\partial\boldsymbol{r}}\\ \rho\frac{\partial h}{\partial\boldsymbol{r}}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\rho\cosh\frac{\partial A}{\partial\boldsymbol{R}}\\ \rho\frac{\partial A}{\partial\boldsymbol{R}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ h_{11} & h_{12} & h_{13}\end{pmatrix}\tag{10.62}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a_{11}&=-\sin S\cos A+\cos S\sin A\sin\varphi\\ a_{12}&=\cos S\cos A+\sin S\sin A\sin\varphi\\ a_{13}&=-\cos\varphi\sin A\end{aligned}\right\}\tag{10.63}$$

$$\left.\begin{aligned}h_{11}&=\cos S\cos\varphi\cosh+\sin S\sinh\sin A+\cos S\sin\varphi\sinh\cos A\\ h_{12}&=\sin S\cos\varphi\cosh-\cos S\sinh\sin A+\sin S\sin\varphi\sinh\cos A\\ h_{13}&=\sin\varphi\cosh-\cos\varphi\sinh\cos A\end{aligned}\right\}\tag{10.64}$$

上述各式中出现的 φ 和 S 是观测站的地理经度和地方恒星时(注意选取的坐标系)。

3. $\partial\dot{\rho}/\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$　由

$$\rho^2=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})^2\tag{10.65}$$

对时间求导数,得

$$\dot{\rho}=\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{R}})\tag{10.66}$$

由此利用(10.59)式可给出

$$\Delta\dot{\rho}=\frac{1}{\rho}[(\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{R}})(\Delta\boldsymbol{r}-\Delta\boldsymbol{R})+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})(\Delta\dot{\boldsymbol{r}}-\Delta\dot{\boldsymbol{R}})]$$
$$-\frac{\dot{\rho}}{\rho^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})(\Delta\boldsymbol{r}-\Delta\boldsymbol{R})\tag{10.67}$$

于是得

$$\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)^T=-\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\boldsymbol{R}}\right)^T=\frac{1}{\rho}\left[(\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{R}})-\frac{\dot{\rho}}{\rho}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\right] \tag{10.68}$$

$$\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\right)^T=-\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\dot{\boldsymbol{R}}}\right)^T=\frac{1}{\rho}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}) \tag{10.69}$$

关于测站坐标矢量 $\boldsymbol{R}$ 及其变率 $\dot{\boldsymbol{R}}$ 的具体表达式，视坐标系的选择而定。例如对地心赤道坐标系，相应的测站坐标矢量的近似表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\begin{pmatrix}R\cos\varphi\cos S\\R\cos\varphi\sin S\\R\sin\varphi\end{pmatrix}\\\dot{\boldsymbol{R}}&=\begin{pmatrix}-R_y\\R_x\\0\end{pmatrix}\dot{S}\end{aligned}\right\} \tag{10.70}$$

其中 R,φ 分别为测站的地心距和地心纬度，$\dot{S}$ 是恒星时变率。

2. $\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})/\partial\sigma$

(1)基本变量为六个轨道根数的情况，需要给出的是下列两矩阵：

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\sigma}\right)=\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial a}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial e}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial i}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\Omega}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\omega}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial M}\right) \tag{10.71}$$

$$\left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial\sigma}\right)=\left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial a}\quad\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial e}\quad\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial i}\quad\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial\Omega}\quad\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial\omega}\quad\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial M}\right) \tag{10.72}$$

这在第一章中已导出，详见公式(1.63)～(1.68)。

关于 $\partial\boldsymbol{r}/\partial M$ 和 $\partial\boldsymbol{r}/\partial\omega$，$\partial\dot{\boldsymbol{r}}/\partial M$ 和 $\partial\dot{\boldsymbol{r}}/\partial\omega$，根据 $\hat{R}=\hat{P}\times\hat{Q}$，不难证明

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial M}-\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\omega}\right|&=\left|\frac{1}{n}\dot{\boldsymbol{r}}-(\hat{R}\times\boldsymbol{r})\right|=O(e)\\\left|\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial M}-\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial\omega}\right|&=\left|-n\left(\frac{a}{r}\right)^3\boldsymbol{r}-(\hat{R}\times\dot{\boldsymbol{r}})\right|=O(e)\end{aligned}\right\} \tag{10.73}$$

而关于 $\partial\boldsymbol{r}/\partial\Omega$ 和 $\partial\boldsymbol{r}/\partial\omega$，$\partial\dot{\boldsymbol{r}}/\partial\Omega$ 和 $\partial\dot{\boldsymbol{r}}/\partial\omega$，则有

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\Omega}-\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\omega}\right|&=|(\hat{j}_z\times\boldsymbol{r})-(\hat{R}\times\boldsymbol{r})|=|(\hat{j}_z-\hat{R})\times\boldsymbol{r}|=O(\sin i)\\\left|\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial\Omega}-\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial\omega}\right|&=|(\hat{j}_z\times\dot{\boldsymbol{r}})-(\hat{R}\times\dot{\boldsymbol{r}})|=|(\hat{j}_z-\hat{R})\times\dot{\boldsymbol{r}}|=O(\sin i)\end{aligned}\right\} \tag{10.74}$$

其中 $\hat{j}_z=(0\ 0\ 1)^T$。上述两个结果表明矩阵$(\partial\boldsymbol{r}/\partial\sigma)$和$(\partial\dot{\boldsymbol{r}}/\partial\sigma)$分别有两列元素之差为 $O(e)$和$O(\sin i)$的量级，这和摄动解中的情况相同，$e=0$，$i=0$ 或 180°都是因变量选择不当对应的奇点，即出现这两种情况时，相应的矩阵行列式为零。这将导致法化矩阵非正定，从而破坏了可观测性。因此，与摄动星历计算一致，为了避免 $e=0$ 的问题，引进变量：

$$a,\quad i,\quad \Omega,\quad \xi=e\cos\omega,\quad \eta=-e\sin\omega,\quad \lambda=M+\omega \tag{10.75}$$

而同时避免 $e=0$ 和 $i=0$ 时，则引进变量：

$$\begin{gathered}a,\quad \xi=e\cos(\omega+\Omega),\quad \eta=-e\sin(\omega+\Omega)\\h=\sin i\cos\Omega,\quad k=-\sin i\sin\Omega,\quad \lambda=M+\omega+\Omega\end{gathered} \tag{10.76}$$

下面将给出消除 $e=0$ 问题的矩阵 $\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})/\partial\sigma$，关于同时消除 $e=0$ 和 $i=0$ 问题的矩阵 $\partial(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})/\partial\sigma$。如有需要，可仿照下面的方法进行推导，或翻阅我们编写的教材《人造地球卫星轨道理论》第十章。

(2)基本变量为 $a,i,\Omega,\xi,\eta,\lambda$ 的情况。此时有

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \sigma}\right)=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial i} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \Omega} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \lambda}\right) \tag{10.77}$$

$$\left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma}\right)=\left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial a} \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial i} \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \Omega} \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \lambda}\right) \tag{10.78}$$

其中对 a,i,Ω 的三个偏导数同前，而又有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \lambda}&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial M}\\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \lambda}&=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial M}\end{aligned}\right\} \tag{10.79}$$

因此只剩下对 ξ 和 η 的两个偏导数需要推导。当然，可以用前面对 e,ω 的偏导数来构成，但涉及到变量转换，比较繁，还是直接由 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的下述表达式推导为宜，即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=r\cos u\hat{P}^*+r\sin u\hat{Q}^*\\ \dot{\boldsymbol{r}}&=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[(-\sin u+\eta)\hat{P}^*+(\cos u+\xi)\hat{Q}^*\right]\end{aligned}\right\} \tag{10.80}$$

其中 $u=f+\omega$，单位矢量 $\hat{P}^*$ 和 $\hat{Q}^*$ 的表达式如下：

$$\hat{P}^*=\begin{pmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{pmatrix},\qquad \hat{Q}^*=\begin{pmatrix}-\sin\Omega\cos i\\ \cos\Omega\cos i\\ \sin i\end{pmatrix} \tag{10.81}$$

由(10.80)式可解出：

$$\left.\begin{aligned}\hat{P}^*&=\frac{1}{p}(\cos u+\xi)\boldsymbol{r}-\frac{r\sin u}{\sqrt{\mu p}}\dot{\boldsymbol{r}}\\ \hat{Q}^*&=\frac{1}{p}(\sin u-\eta)\boldsymbol{r}+\frac{r\cos u}{\sqrt{\mu p}}\dot{\boldsymbol{r}}\end{aligned}\right\} \tag{10.82}$$

(10.80)式表明，只涉及到 $r\cos u,r\sin u,\cos u,\sin u$ 对 ξ,η 的偏导数，利用第一章给出的关系式(1.61)～(1.62)，不难导出

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi}=A\boldsymbol{r}+B\dot{\boldsymbol{r}},\qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta}=C\boldsymbol{r}+D\dot{\boldsymbol{r}} \tag{10.83}$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \sigma}=A'\boldsymbol{r}+B'\dot{\boldsymbol{r}},\qquad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \eta}=C'\boldsymbol{r}+D'\dot{\boldsymbol{r}} \tag{10.84}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{1}{p}\left[-a(\cos u+\xi)-\frac{r}{1-e^2}(\sin u-\eta)(\xi\sin u+\eta\cos u)\right]\\ B&=\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\left[a\left(\sin u-\frac{a}{r}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\eta\right)+\frac{r}{1-e^2}(\sin u-\eta)\right]\\ C&=\frac{1}{p}\left[a(\sin u-\eta)-\frac{r}{1-e^2}(\cos u+\xi)(\xi\sin u+\eta\cos u)\right]\\ D&=\frac{r}{\sqrt{\mu p}}\left[a\left(\cos u+\frac{a}{r}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\xi\right)+\frac{r}{1-e^2}(\cos u+\xi)\right]\end{aligned}\right\} \tag{10.85}$$

$$\left.\begin{aligned}
A' &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left\{\frac{1}{p}(\sin u-\eta)-\frac{1}{r}\left[\frac{1}{1-e^2}(\sin u-\eta)+\left(\frac{a}{r}\right)\sin u \quad \left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\eta\right]\right\} \\
B' &= \frac{r}{p}\cos u+\frac{1}{1-e^2}\xi \\
C' &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left\{\frac{1}{p}(\cos+\xi)-\frac{1}{r}\left[\frac{1}{1-e^2}(\cos u+\xi)+\left(\frac{a}{r}\right)\cos u+\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\xi\right]\right\} \\
D' &= -\frac{r}{p}\sin u+\frac{1}{1-e^2}\eta
\end{aligned}\right\} \tag{10.86}$$

上述各式中出现的 u 可按第六章(6.52)～(6.55)式计算。

3. $\partial\sigma/\partial X$

从上一节的讨论已经知道，轨道改进是在线性化基础上通过迭代求解的，而待估状态量是以$(X_k-X_k^{(l)})$这一改正量形式出现的，在线性化过程中已丢掉改正量的二阶以上各项，迭代过程中改正量的值又是愈来愈小。因此，相应的法化矩阵就无需严格计算，σ 与待估状态量 X(包括待估根数 σ_0 或 $\bar{\sigma}_0$ 和某些参数，这里 $t_0=t_k$)的关系可以简化，即略去摄动小量。

为了说明清楚起见，假定待估状态量只有六个轨道根数 $\bar{\sigma}_0:\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0,\bar{\Omega}_0,\bar{\omega}_0,\bar{M}_0$，且只讨论保守力摄动情况。那么，根据前面各章的介绍可知，在上述简化前提下，只要考虑 $\sigma(t)$的长期变化即可，特别在涉及定轨弧段不太长的情况下，仅取一阶长期摄动项即可，因此有

$$\left.\begin{aligned}
a &= \bar{a}_0 \\
e &= \bar{e}_0 \\
i &= \bar{i}_0 \\
\Omega &= \bar{\Omega}_0+\Omega_1(t-t_0) \\
\omega &= \bar{\omega}_0+\omega_1(t-t_0) \\
M &= \bar{M}_0+(\bar{n}_0+M_1)(t-t_0) \\
\bar{n}_0 &= \sqrt{\mu}\,\bar{a}_0^{-3/2}
\end{aligned}\right\} \tag{10.87}$$

其中 Ω_1,ω_1,M_1 即一阶长期项系数，它们都是 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$ 的函数，即

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_1 &= \Omega_1(\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0) \\
\omega_1 &= \omega_1(\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0) \\
M_1 &= M_1(\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0)
\end{aligned}\right\} \tag{10.88}$$

由(10.87)式不难给出如下结果：

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial X}\right)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & 1 & 0 & 0 \\
\omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 & 1 & 0 \\
M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{10.89}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&\Omega_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial a}, &&\Omega_{12}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial e}, &&\Omega_{13}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial i}\\
&\omega_{11}=\frac{\partial\omega_1}{\partial a}, &&\omega_{12}=\frac{\partial\omega_1}{\partial e}, &&\omega_{13}=\frac{\partial\omega_1}{\partial i}\\
&M_{11}=\frac{\partial(\bar{n}_0+M_1)}{\partial a}, &&M_{12}=\frac{\partial M_1}{\partial e}, &&M_{13}=\frac{\partial M_1}{\partial i}
\end{aligned}\right\}\tag{10.90}
$$

注意,上述偏导数均是对 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$ 求,各式中出现的 a,e,i 亦均为 $\bar{a}_0,\bar{e}_0,\bar{i}_0$。

根据上面导出的三组基本关系式,即可给出对非线性系统进行线性化时所需要的 B 矩阵:

$$
B(X,t)=\frac{\partial H(X,t)}{\partial X}
$$

对于四种类型的观测量,分别为

$$
B=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial X}\\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial X}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial \boldsymbol{r}}\\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial \boldsymbol{r}}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial X}\right)\tag{10.91}
$$

$$
B=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A}{\partial X}\\[2mm] \dfrac{\partial h}{\partial X}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A}{\partial \boldsymbol{r}}\\[2mm] \dfrac{\partial h}{\partial \boldsymbol{r}}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial X}\right)\tag{10.92}
$$

$$
B=\left(\frac{\partial\rho}{\partial X}\right)=\left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial X}\right)\tag{10.93}
$$

$$
B=\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial X}\right)=\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\boldsymbol{r}}\quad\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\sigma}\\[2mm] \dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial\sigma}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial X}\right)\tag{10.94}
$$

如果测站向量 $\boldsymbol{R}$ 也有待改进的内容,即增加待估参数,那么上述 B 矩阵也相应地增加下述各项:

$$
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial\boldsymbol{R}}\\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial\boldsymbol{R}}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial X}\right),\quad
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A}{\partial\boldsymbol{R}}\\[2mm] \dfrac{\partial h}{\partial\boldsymbol{R}}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial X}\right),\quad
\left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{R}}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial X}\right),\quad
\left(\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\boldsymbol{R}}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial X}\right)
$$

如果 $\dot{\boldsymbol{R}}$ 也有待改进的参数,处理方法与上类似。

最后说明一点,如果待估状态量中的天体轨道根数不用 $\bar{\sigma}_0$,而改用 σ_0,相应的矩阵 $\partial\sigma/\partial X$ 的形式不变,只是上述各式中出现的 $\bar{\sigma}_0$ 全部改成 σ_0 即可。

在第一章 1.7 中讨论初轨确定时,曾提到在多点(指观测资料)以及弧段稍长情况下考虑一些简单的摄动进行定轨的问题,这从前面的讨论可清楚地了解这种处理是容易实现的,而且过程还可以简化,例如,由于弧段不会长,(10.89)式给出的矩阵 $\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial X}\right)$ 即可简化,显然可令

$$
\left.\begin{aligned}
&\Omega_{11}=\Omega_{12}=\Omega_{13}=\omega_{11}=\omega_{12}=\omega_{13}=M_{12}=M_{13}=0\\
&M_{11}=\frac{\partial\bar{n}_0}{\partial a}
\end{aligned}\right\}
$$

10.5 轨道改进的基本过程及有关问题

1. 轨道改进的基本过程

在观测资料较多的情况下，可充分利用多资料的统计特性进行定轨，下面介绍这一过程。

已知一测量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_s$ 和待估状态量 X_0 的初值 $\hat{X}_{0/0}$，X_0 对应 t_0 时刻，一般有 $t_1\leqslant t_0\leqslant t_s$。轨道改进的任务是：在上述条件下用最小二乘估计给出待估状态量 X_0 的最优估计 $\hat{X}_{0/s}$。

假定已迭代到第 j 步，有 $\hat{X}_{0/s}^{(j)}$，$\hat{X}_{0/0}$即 $\hat{X}_{0/s}^{(0)}$。首先给出观测量 $Y_l(1=1,2,\cdots,s)$的计算值 $H(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)$，这一步实为有摄星历表的计算，可用多种方法进行，主要有两类：数值方法（相应的变量可用轨道根数 σ，也可用坐标和速度 r 和 $\dot{r}$）和分析方法。当用根数外推时（状态转移），算出 t_l 时刻的 σ_l 后即可计算 r_l 和 $\dot{r}_l$，由 r_l 和 $\dot{r}_l$ 就可给出观测量 Y_l 的计算值。第二步即计算 B 矩阵，$B=B(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)$，相应的公式在上一节已全部给出，于是构成线性化系统：

$$Y_l-H(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)=B(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)[X_0-\hat{X}_{0/s}^{(j)}]+V_l \tag{10.95}$$

这也叫条件方程。第三步是根据最小二乘估计的最优准则得到下述法方程：

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{l=1}^{s}B^T(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)B(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)\right)[X_0-\hat{X}_{0/s}^{(j)}]\\ &=\sum_{l=1}^{s}B^T(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)[Y_l-H(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)]\end{aligned} \tag{10.96}$$

其中 $\sum\limits_{l=1}^{s}B^TB$ 即法化矩阵（方阵）。第四步求解法方程，一种常用的方法是通过法化矩阵求逆的方式进行，给出解如下：

$$\hat{X}_{0/s}^{(j+1)}=\hat{X}_{0/s}^{(j)}+\sum_{l=1}^{s}(B^TB)^{-1}B^T[Y_l-H(\hat{X}_{0/s}^{(j)},t_l)] \tag{10.97}$$

相应的残差平方和为

$$U^{(j)}=\sum_{l=1}^{s}(Y_l-H(\hat{X}_{0/s}^{(j+1)},t_l))^T(Y_l-H(\hat{X}_{0/s}^{(j-1)},t_l)) \tag{10.98}$$

接着是比较两次残差平方和之差，如果达到下列要求：

$$|U^{(j)}-U^{(j+1)}|\leqslant\mu \tag{10.99}$$

则迭代过程结束，$\hat{X}_{0/s}^{(j+1)}$即所求状态量的最小二乘估计值，否则继续迭代下去。这里 $\mu>0$，其具体值将根据实际需要和资料情况而定。有时用均方差 σ^* 代替残差平方和 U，即

$$\sigma^*=\sqrt{U/(s\times m)} \tag{10.100}$$

其中 m 是观测量 Y 的维数，而 s 即观测次数，事实上 $s\times m$ 即观测数据的总数目。

2. 轨道改进中的一些问题

(1)从上一段的基本过程可以看出，实际上给出状态量的最优估计是一个多变元的迭代过

程，对待估状态量 X_0 的初值 $\hat{X}_{0/0}$ 是有一定要求的。不过，只要初值误差不太大，总是收敛的，但估计值 $\hat{X}_{0/l}$ 的精度将取决于资料的测量精度和分布状况。如果初值误差大、资料也不理想，影响迭代收敛或估值精度，此时可采用初始估计(如果有)或固定某个已知精度较高、变化又小的待估状态量的办法来解决，具体处理方法要视具体情况而定。

(2)在资料不太多的情况下，错误资料将明显影响估值精度。因此有必要把误差较大的(包括"错误"的)资料剔除掉，这类资料又称野值。通常是根据统计特性(即随机差的分布规律)来进行剔除，凡在第 j 次迭代过程中残差大于 $3\sigma^*$ 的资料都作为野值剔除。这一剔除原则具有"服从"大多数的特点，有时并不绝对合理，因此，如何剔除野值问题仍需要进一步研究。

(3)既然资料本身具有不同的精度(除野值外)，那么像简单最小二乘估计那样，把所有资料都按等权处理显然是不合理的，因此就有一个加权问题。前面 10.2 中已从理论上证明了最优加权的方式，但在资料不充分多，统计特性不完全具备的情况下，按随机采样的方差来加权，有时效果并不好。因此，到目前为止，处理加权问题时，在很大程度上还是依赖于人们的经验，如何针对具体的样本给以合理的加权(包括理论上的解释)，是很值得研究的一个课题，它的解决对估值精度的提高起重要作用。至于考虑加权后的算法，只要对上一段介绍的基本过程稍加修改即行，即在相应的公式中加进权因子，这在前面 10.2 中已介绍过。

(4)在资料和待估状态量较多的情况下，批处理方法将受到数据存贮量大和法化矩阵求逆困难的影响，如何合理的将序贯算法与批处理方法结合起来也是一个值得探索的问题。当然，关于法化矩阵求逆，可以从数学方法上去寻求解决的途径。

(5)事实上，动力模型和数学方法都是在一定程度上的近似，这将给状态转移计算带来相应的误差，因此就存在一个模型噪声问题。关于状态方程加不加模型噪声，这本来是最小二乘估计与卡尔曼滤波的重要区别，尽管最小二乘估计中也可以加一模型噪声，但很难给出相应的数学模型，有待进一步探讨。

总之，利用多资料进行天体的定轨工作是一个涉及面较广而又极其重要的问题，它不仅可提供精确的轨道，还为进一步利用精确轨道(如导航等定位问题)或在精确定轨的同时测定某些有关的物理参数(如人卫定轨中一些地球物理和高层大气参数的测定等)提供一种不可代替的重要途径和手段。

参考文献

[1]Brouwer, D., Clemence, G. M., *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and Lendon, 1961.

[2]贾沛璋、朱征桃,《最优估计及其应用》,科学出版社,1984 年。

[3]刘林,《人造地球卫生轨道力学》,高等教育出版社,1992 年。

[4]Tapley, B. D., *Proceeding of NATO Advanced Study Institute in Dynamical Astronomy*, 396～425, 1973.

附　录

Ⅰ. 天文常数(Astronomical Constants)

IAU(1976)天文常数系统

单位:米(m)、公斤(kg)和秒(s)分别为国际单位系统(SI)中的长度、质量和时间单位。

定义常数(Defining constants):

1. 高斯引力常数(Gaussian gravitational constant)　$k=0.017\ 202\ 098\ 95$
2. 光速(Speed of light)　$c=299\ 792\ 458\text{m s}^{-1}$

初始常数(Primary constants)

3. 一天文单位的光行时间(Light-time for unit distance)　$\tau_A=499.004\ 782\text{s}$
4. 地球赤道半径(Equatorial radius for Earth)　$a_e=6378\ 140\text{m}$
5. 地球形状力学因子(Dynamical form-factor for Earth)　$J_2=0.001\ 082\ 63$
6. 地心引力常数(Geocentric gravitational constant)　$GE=3.986\ 005\times10^{14}\text{m}^3\text{s}^{-2}$
7. 引力常数(Constant of gravitation)　$G=6.672\times10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
8. 月球与地球质量比(Ratio of mass of Moon to that of Earth)　$\mu=0.012\ 300\ 02$
9. 黄径总岁差(General precession in longitude, per Julian century, at standard epoch 2000)　$p=5029''.0966$
10. 黄赤交角(Obliquity of the ecliptic, at standard epoch 2000)　$\varepsilon=23°26'21''.448$

推导常数(Derived constants)

11. 章动常数(Constant of nutation, at standard epoch 2000)　$N=9''.2025$
12. 一天文单位的长度(Unit distance)　$c\tau_A=A=1.495\ 978\ 70\times10^{11}\text{m}$
13. 太阳视差(Solar parallax)　$\arcsin(a_e/A)=\pi_\odot=8''.794\ 148$
14. 光行差常数(Constant of aberration, for standard epoch 2000)　$\kappa=20''.49\ 552$

15. 地球扁率(Flattening factor for the Earth) $f=0.003\ 352\ 81=1/298.257$

16. 日心引力常数(Heliocentric gravitational constant)

$$A^3k^2/D^2=GS=1.327\ 124\ 38\times10^{20}\mathrm{m^3s^{-2}}$$

17. 太阳与地球质量比(Ratio of mass of Sun to that of the Earth)

$$(GS)/(GE)=S/E=332\ 946.0$$

18. 太阳与地月系质量比(Ratio of mass of Sun to that of Earth+Moon)

$$(S/E)/(1+\mu)=328\ 900.5$$

19. 太阳质量(Mass of the Sun) $(GS)/G=S=1.9891\times10^{30}\mathrm{kg}$

20. 行星质量系统(System of planetary masses) (太阳质量=1)

Mercury	6 023 600	Jupiter	1 047.355
Venus	408 523.5	Saturn	3 498.5
Earth+Moon	328 900.5	Uranus	22 869
Mars	3 098 710	Neptune	19 314
		Pluto	3 000 000

Ⅱ. 常用公式

1. 球面三角公式

正弦公式：

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

余弦公式：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$
$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$

五元素公式：

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A$$
$$\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a$$
$$\sin A\cos B=\cos b\sin C-\sin B\cos c\cos A$$

2. 贝塞耳函数 $J_n(ne)$

$$J_1(e)=\frac{1}{2}e(1-\frac{1}{8}e^2+\frac{1}{192}e^4-\frac{1}{9216}e^4+\cdots)$$
$$J_2(2e)=\frac{1}{2}e^2(1-\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{24}e^4-\frac{1}{360}e^6+\cdots)$$
$$J_3(3e)=\frac{9}{16}e^3(1-\frac{9}{16}e^2+\frac{81}{640}e^4-\cdots)$$

$$J_4(4e)=\frac{2}{3}e^4\left(1-\frac{4}{5}e^2+\frac{4}{15}e^4-\cdots\right)$$

$$J_5(5e)=\frac{625}{768}e^5\left(1-\frac{25}{24}e^2+\cdots\right)$$

$$J_6(6e)=\frac{81}{80}e^6\left(1-\frac{9}{7}e^2+\cdots\right)$$

3. 勒让德多项式 $P_l(\mu)$

$$P_0(\mu)=1$$

$$P_1(\mu)=\mu$$

$$P_2(\mu)=\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{2}$$

$$P_3(\mu)=\frac{5}{2}\mu^3-\frac{3}{2}\mu$$

$$P_4(\mu)=\frac{35}{8}\mu^4-\frac{15}{4}\mu^2+\frac{3}{8}$$

$$P_5(\mu)=\frac{63}{8}\mu^5-\frac{35}{4}\mu^3+\frac{15}{8}\mu$$

$$P_6(\mu)=\frac{231}{16}\mu^6-\frac{351}{16}\mu^4+\frac{105}{16}\mu^2-\frac{5}{16}$$

4. 缔合勒让德多项式 $P_l^m(\mu)$

$$P_1^1(\mu)=(1-\mu)^{1/2}$$

$$P_2^1(\mu)=3\mu(1-\mu^2)^{1/2}$$

$$P_2^2(\mu)=3(1-\mu^2)$$

$$P_3^1(\mu)=\left(\frac{15}{2}\mu^2-\frac{3}{2}\right)(1-\mu^2)^{1/2}$$

$$P_3^2(\mu)=15\mu(1-\mu^2)$$

$$P_3^3(\mu)=15(1-\mu^2)^{3/2}$$

$$P_4^1(\mu)=\left(\frac{35}{2}\mu^3-\frac{15}{2}\mu\right)(1-\mu^2)^{1/2}$$

$$P_4^2(\mu)=\left(\frac{105}{2}\mu^2-\frac{15}{2}\right)(1-\mu^2)$$

$$P_4^3(\mu)=105\mu(1-\mu^2)^{3/2}$$

$$P_4^4(\mu)=105(1-\mu^2)^2$$

5. 一些函数的平均值

(1) $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)}=1$

(2) $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)\sin qf}=0 \quad (p,q=0,1,2,\cdots,)$

(3) $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\cos qf}=0 \quad (p\geqslant 2, q\geqslant p-1)$

(4) $\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{p}\cos qf}=(1-e^{2})^{-(p-3/2)}\sum_{n(2)=q}^{(p-2)-\delta}\binom{p-2}{n}\binom{n}{\frac{1}{2}(n-q)}\left(\frac{e}{2}\right)^{n} \qquad \delta=\frac{1}{2}[1-(-1)^{p-q}]$

$(p\geqslant 2, q<p-1)$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2}}=(1-e^{2})^{-1/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\cos qf}=0 \quad (q\geqslant 1)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{3}}=(1-e^{2})^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\cos f}=\frac{1}{2}e(1-e^{2})^{-3/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\cos qf}=0 \quad (q\geqslant 2)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{4}}=(1+\frac{1}{2}e^{2})(1-e^{2})^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{4}\cos f}=e(1-e^{2})^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{4}\cos 2f}=\frac{1}{4}e^{2}(1-e^{2})^{-5/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{4}\cos qf}=0 \quad (q\geqslant 3)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}}=(1+\frac{3}{2}e^{2})(1-e^{2})^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}\cos f}=\frac{3}{2}e(1+\frac{1}{4}e^{2})(1-e^{2})^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}\cos 2f}=\frac{3}{4}e^{2}(1-e^{2})^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}\cos 3f}=\frac{1}{8}e^{3}(1-e^{2})^{-7/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{5}\cos qf}=0 \quad (q\geqslant 4)$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{6}}=(1+3e^{2}+\frac{3}{8}e^{4})(1-e^{2})^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\cos f}=2e(1+\frac{3}{4}e^{2})(1-e^{2})^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\cos 2f}=\frac{3}{2}e^{2}(1+\frac{1}{6}e^{2})(1-e^{2})^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\cos 3f}=\frac{1}{2}e^{3}(1-e^{2})^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\cos 4f}=\frac{1}{16}e^{4}(1-e^{2})^{-9/2}$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^6\cos qf}=0 \quad (q\geqslant 5)$$

$$(5)\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)\cos qf}=\left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q \quad (q=0,1,2,\cdots)$$

$$(6)\ \overline{\cos qf}=\left(\frac{-e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^q(1+\sqrt{1-e^2}) \quad (q=0,1,2,\cdots)$$

$$\overline{\cos f}=-e$$

$$\overline{\cos 2f}=\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2})^2}e^2$$

$$\overline{\cos 3f}=-\frac{4}{e}\cos 2f+3e$$

$$\overline{\cos 4f}=\frac{2}{e^2}(6-e^2)\cos 2f-9$$

$$\overline{\cos 5f}=-\frac{4}{e^3}(8-3e^2)\cos 2f+\frac{1}{e}(24-5e^2)$$

$$\overline{\cos 6f}=\frac{1}{e^4}(80-48e^2+3e^4)\cos 2f-\frac{2}{e^2}(30-13e^2)$$

$$(7)\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p(f-M)\cos qf}=0 \quad (p,q=0,1,2,\cdots)$$

$$(8)\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^2(f-M)\sin qf}=-\frac{1}{q}\left(\frac{\cos qf}{\sqrt{1-e^2}}\right) \quad (q\geqslant 1)$$

$$(9)\ \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^p(f-M)\sin qf}=(1-e^2)^{-(p-3/2)}\sum_{n=0}^{p-2}\sum_{m=0}^{n}\binom{p-2}{n}\binom{n}{m}\left(\frac{e}{2}\right)^n \times\overline{\left\{-\frac{\cos(q+n-2m)f}{q+n-2m}\right\}}_{2m\neq q+n} \quad (p\geqslant 3,q\geqslant 1)$$

$$(10)\ \overline{\left(\frac{r}{a}\right)^p\cos qf}:$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)}=1+\frac{1}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)\cos f}=-\frac{3}{2}e$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)\cos 2f}=\frac{3}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2}=1+\frac{3}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos f}=-2e\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2f}=\frac{5}{2}e^2$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 3f}=-\frac{5}{2}e^3$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^3}=1+3e^2+\frac{3}{8}e^4$$

$$\overline{\left(\frac{r}{a}\right)^4}=1+5e^2+\frac{15}{8}e^4$$

6. **汉森系数** $X_p^{n,m}(e)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots,m=0,1,2,\cdots)$

$$X_0^{n,0}=1+\frac{1}{4}n(n+1)e^2+\frac{1}{64}n(n-2)(n^2-1)e^4+\cdots$$

$$X_1^{n,0}=-\frac{1}{2}ne-\frac{1}{16}n(n^2-n-3)e^3-\cdots$$

$$X_2^{n,0}=\frac{1}{8}n(n-3)e^2+\frac{1}{96}n(n^3-6n^2-n+22)e^4+\cdots$$

$$X_3^{n,0}=-\frac{1}{48}n(n^2-9n+17)e^3-\cdots$$

$$X_4^{n,0}=\frac{1}{384}n(n^3-18n^2+95n-142)e^4+\cdots$$

$$X_{-3}^{n,1}=\frac{1}{384}(n^4-10n^3+17n^2+28n-27)e^4+\cdots$$

$$X_{-2}^{n,1}=-\frac{1}{48}(n^3-3n^2-4n+4)e^3-\cdots$$

$$X_{-1}^{n,1}=\frac{1}{8}(n^2+n-1)e^2+\frac{1}{96}(n^4-2n^3-4n^2+7n+2)e^4+\cdots$$

$$X_0^{n,1}=-\frac{1}{2}(n+2)e-\frac{1}{16}n(n-1)(n+2)e^3-\cdots$$

$$X_1^{n,1}=1+\frac{1}{4}(n^2+n-4)e^2+\frac{1}{64}(n^4-2n^3-9n^2+2n+3)e^4+\cdots$$

$$X_2^{n,1}=-\frac{1}{2}(n-2)e-\frac{1}{16}(n^3-3n^2-12n+20)e^3-\cdots$$

$$X_3^{n,1}=\frac{1}{8}(n^2-7n+9)e^2+\frac{1}{96}(n^4-10n^3+2n^2+133n-162)e^4+\cdots$$

$$X_4^{n,1}=-\frac{1}{48}(n^3-15n^2+62n-64)e^3-\cdots$$

$$X_5^{n,1}=\frac{1}{384}(n^4-26n^3+221n^2-696n+625)e^4+\cdots$$

$$X_{-2}^{n,2}=\frac{1}{384}(n^4-2n^3-13n^2+6n+16)e^4+\cdots$$

$$X_{-1}^{n,2}=-\frac{1}{48}(n^3+3n^2-n-4)e^3-\cdots$$

$$X_0^{n,2}=\frac{1}{8}(n+2)(n+3)e^2+\frac{1}{96}(n-1)(n-2)(n+2)(n+3)e^4+\cdots$$

$$X_1^{n,2}=-\frac{1}{2}(n+4)e-\frac{1}{16}(n^3+3n^2-9n-28)e^3-\cdots$$

$$X_2^{n,2}=1+\frac{1}{4}(n^2+n-16)e^2+\frac{1}{64}(n^4-2n^3-33n^2+2n+220)e^4+\cdots$$

$$X_3^{n,2}=-\frac{1}{2}(n-4)e-\frac{1}{16}(n^3-5n^2-29n+108)e^3-\cdots$$

$$X_4^{n,2}=\frac{1}{8}(n^2-11n+26)e^2+\frac{1}{96}(n^4-14n^3+5n^2+436n-1036)e^4+\cdots$$

$$X_5^{n,2}=-\frac{1}{48}(n^3-21n^2+131n-236)e^3-\cdots$$

$$X_6^{n,2}=\frac{1}{384}(n^3-34n^3+395n^2-1826n+2760)e^4+\cdots$$